N° d'ordre :

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

" Mathématiques Appliquées "

par

Jean DELLA DORA

—o—

SUR QUELQUES ALGORITHMES DE RECHERCHE DE VALEURS PROPRES

—o—

Thèse soutenue le 4 Juillet 1973 devant la commission d'examen :

Monsieur	N.GASTINEL	Président
Messieurs	F. ROBERT	Examinateurs
	P.J. LAURENT	

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534927_0046

N° d'ordre :

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

" Mathématiques Appliquées "

par

Jean DELLA DORA

—o—

SUR QUELQUES ALGORITHMES DE RECHERCHE DE VALEURS PROPRES

—o—

Thèse soutenue le 4 Juillet 1973 devant la commission d'examen :

Monsieur	N.GASTINEL	Président
Messieurs	F. ROBERT	Examinateurs
	P.J. LAURENT	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Jean	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique

Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physilogie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
MM.	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale

MM.	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	HANO JUN-ICHI	Mathématiques Pures
	STEPHENS Michaël	Mathématiques appliquées

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BEAUDOING André	Pédiatrie
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et Minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	DE ROUGEMONT Jacques	Neurochirurgie
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BILLET Jean	Géographie
	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUVARD Maurice	Mécanique des fluides
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
	LACOUME Jean-Louis	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)

MM.	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT A)
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mlle	RIERY Yvette	Biologie animale
MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RENAUD Maurice	Chimie
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marquerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	SIDNEY STUARD	Mathématiques Pures
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physilogie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 30 mai 1972.

Je dois ce travail et ces résultats à mon Maître Monsieur le Professeur N. GASTINEL qui m'a enseigné l' analyse numérique et qui m'a donné le goût de l'analyse linéaire.

Les longues heures qu'il a bien voulu me consacrer et pendant lesquelles il a su si souvent m'orienter et m'encourager, m'ont permis de poursuivre ces recherches.

Je le prie de bien vouloir trouver ici l'expression de ma gratitude et mes remerciements les plus sincères.

Que Monsieur F. ROBERT, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lyon, veuille bien accepter mes remerciements pour les nombreux conseils qu'il m'a prodigués.

Je remercie Monsieur le Professeur P.J. LAURENT qui a bien voulu faire partie du Jury.

Ma reconnaissance va aussi

- à tous les membres de l'Institut de Mathématiques Appliquées, en particulier à Mademoiselle Cl. DI CRESCENZO qui m'a si souvent conseillé pour la réalisation de mes programmes,

- à Messieurs P. CHENIN, M. DUC-JACQUET, A. EBERHARD, X. ROUSSET DE PINA, J. WOLF, pour les nombreuses discussions, toujours enrichissantes que nous avons eues,

- à Messieurs LUNA et VUST, de l'Institut de Mathématiques Pures, pour leurs conseils et l'apport fructueux de leur expérience,

- à Monsieur LACOLLE, Etudiant en D.E.A., pour l'intérêt qu'il apporte à l'analyse linéaire,

- à Madame M.J. DOREL et à Mademoiselle Cl. PAYERNE pour leur précieux concours dans la réalisation technique, ainsi qu'à toute l'équipe du Service de Reproduction pour sa patience et sa compétence.

A mes Parents,

Ma Femme et ma Fille.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION et NOTATIONS

PREMIERE PARTIE Le théorème de Rutishauser

A Les définitions de base

B L'algorithme GR

C Remarques

D Conclusion

DEUXIEME PARTIE Décomposition du groupe linéaire

Chapitre I

Introduction à une classification des groupes de décomposition de $G\ell(n,\mathbb{R})$ suivant $T^+(n,\mathbb{R})$.

Chapitre II

Les algorithmes d'orthogonalisation

§1 Introduction

§2 L'orthogonalisation au sens de Hilbert-Schmidt-Graev

§3 "L'élimination".

Chapitre III

Théorie et pratique des procédés de symplectisation

§1 Le groupe symplectique

§2 Le procédé de symplectisation

§3 La décomposition symplectique non normalisée

§4 La décomposition symplectique normalisée

§5 L'élimination symplectique

§6 Continuité de la décomposition symplectique

§7 Coût de l'algorithme $\hat{SR}$.

Chapitre IV

Les algorithmes semi simples

§1 Le Σ-algorithme

§2 Les algorithmes à masques.

Chapitre V

Les algorithmes limites

§1 L'algorithme LR

§2 La décomposition de Bruhat.

TROISIEME PARTIE Applications et résultats numériques

Chapitre I

Introduction

Chapitre II

Les méthodes de résolution (directes) de systèmes linéaires.

Chapitre III

Les algorithmes de recherche de valeurs propres.

QUATRIEME PARTIE Quelques problèmes relatifs à l'algorithme LR

A) Introduction

B) Etude de la constructibilité

C) Etude analytique de l'algorithme LR.

INTRODUCTION

Ce travail est consacré à l'analyse numérique linéaire. Il développe certaines idées de Monsieur le Professeur Gastinel sur une nouvelle façon d'aborder les problèmes de résolution de systèmes linéaires et de recherche des valeurs propres d'une matrice.

L'idée de base est la suivante :

Pour rechercher les valeurs propres d'une matrice on connait deux procédés itératifs importants :

.) le procédé de Rutishauser (LR) [1]
.) le procédé de Francis (QR) [2]

Ils sont tous deux basés sur des décompositions du groupe linéaire : la décomposition de Gauss et la décomposition d'orthogonalisation.

Ces algorithmes ont été intensivement étudiés pour l'utilisation et des techniques très précises ont été élaborées (par exemple la théorie des translations de l'origine) afin de les améliorer.

On peut penser à une autre voie qui consisterait à chercher de nouveaux algorithmes pour décomposer le groupe linéaire, puis a déterminer à quelles classes particulières de matrices tel ou tel algorithme est bien adapté.

Cette idée nous a conduit au développement suivants :

Dans la première partie nous donnons une extension du théorème classique de Rutishauser, extension (parfaitement) adaptée à notre propos, définissant le cadre qui doit guider notre recherche.

La seconde partie est le coeur de ce travail, elle montre comment on peu étendre la classe des algorithmes de décomposition connus. Dans le premier chapitre nous montrons qu'elle est la difficulté que l'on rencontre en essayant de faire une liste des sous groupes de $G\ell(n,\mathbb{R})$ "utilisables" et dans quel cadre nous pouvons assez facilement nous placer pour résoudre le problème.

Le second chapitre est un rappel de certains résultats de Graev peu connus en analyse numérique.

Le troisième chapitre propose un procédé nouveau de décomposition du groupe linéaire basé sur l'utilisation du groupe symplectique.

Le quatrième chapitre est la description d'une famille d'algorithmes qui nous semblent important d'une part d'un point de vue pratique comme nous le verrons dans les résultats numériques, d'autre part d'un point de vue théorique car
- .) ils "généralisent" tous les algorithmes simples que nous pouvons construire
- .) ils permettent de comprendre certains phénomènes liés à ce que nous appelons des algorithmes limites (LR par exemple).

Le cinquième chapitre est d'ailleurs consacré à l'étude de ces algorithmes limites et en particulier d'une décomposition dite de "Bruhat" du groupe linéaire et qui permet de jeter quelques lumières sur la décomposition de Gauss.

La troisième partie est consacrée à quelques résultats numériques.

Comme nous l'avons dit précédemment les algorithmes classiques LR et QR ont été intensivement étudiés pour l'application et de ce fait l'étude directe a été (certainement faute de temps) négligée ; or il est évident que des problèmes très importants : constructibilité de l'algorithme, classes de Matrices bien adaptées à l'algorithme, phénomènes de pivotement des valeurs propres sur la diagonale ; méritent plus d'attention afin de permettre une application rationnelle de ces algorithmes.

Nous avons dans la quatrième partie commencé une étude "fine" de l'algorithme LR et de certains problèmes qui lui sont liés ; les résultats obtenus montrent que nous n'avons pu franchir qu'un tout petit pas dans cette direction.

Enfin l'auteur a essayé tout au long de ce travail d'exprimer la conviction profonde qui est la sienne à savoir que des méthodes issues de la géométrie se doivent de féconder l'analyse linéaire. Il est évident que les théories des groupes de Lie, des groupes classiques, des géométries euclidiennes ou non, sont fondamentale pour le développement ultérieur de l'analyse numérique.

Le premier travail de l'analyste numéricien qui emprunterait cette voie, serait de dépasser le problème du langage et de présenter à l'utilisateur physicien ou ingénieur les résultats fondamentaux de S. Lie et E. Cartan qui sans aucun doute lui seraient d'une grande utilité.

Nous espérons que ce travail apparaitra comme un pas dans cette voie.

NOTATIONS

Dans cette thèse nous conserverons toujours les notations suivantes :

$M(n,\mathbb{R})$ désignera l'algèbre des matrices carrées à n lignes et n colonnes.

$G\ell(n,\mathbb{R})$ désignera le groupe multiplicatif des matrices carrées régulières sous ensemble de $M(n,\mathbb{R})$ (groupe linéaire général).

$T^{+}(n,\mathbb{R})$ désignera le groupe multiplicatif des matrices carrées appartenant à $G\ell(n,\mathbb{R})$ triangulaires supérieures.

$T_1(n,\mathbb{R})$ désignera le groupe des matrices carrées régulières unipotentes de $G\ell(n,\mathbb{R})$ (c'est-à-dire c'est l'ensemble des matrices T triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale).

$T^{-}(n,\mathbb{R})$ est le groupe des matrices ($\in G\ell(n,\mathbb{R})$ triangulaires inférieures.

$T_1^{-}(n,\mathbb{R})$ est le groupe des matrices ($\in G\ell(n,\mathbb{R})$ triangulaires inférieures unipotentes.

$P(n,\mathbb{R})$ désignera le groupe des matrices de permutation de taille n.

$D(n,\mathbb{R})$ désignera le groupe des matrices diagonales régulières.

Les autres groupes seront définis au moment de leur apparition.

PREMIERE PARTIE

LE THEOREME DE RUTISHAUSER

A - LES DEFINITIONS DE BASE [1]

DEFINITION 1

Soient G et T deux sous groupes de $G\ell(n,\mathbb{R})$. Nous dirons que G décompose $G\ell(n,\mathbb{R})$ suivant T si et seulement si :

i) G est un sous groupe de $G\ell(n,\mathbb{R})$
T est un sous groupe de $T^+(n,\mathbb{R})$

ii) $G \cap T = \{I_n\}$
(I_n matrice unité d'ordre n)

iii) Si $\Omega = G.T$ (produit direct des deux groupes) alors pour la topologie habituelle de $G\ell(n,\mathbb{R})$:

$$G\ell(n,\mathbb{R}) = \overline{\Omega}$$

iv) $G \cap T^+(n,\mathbb{R}) \subset D(n,\mathbb{R})$.

REMARQUES

1. iii) exprime que presque tout élément de $G\ell(n,\mathbb{R})$ se décompose sous la forme

$$A = g.t \qquad (g \in G \text{ et } t \in T)$$

2. ii) exprime que si la décomposition A = g.t d'une matrice régulière est possible, alors elle est unique.
En effet si $A = g_1 t_1 = g_2 t_2$ $(g_1, g_2 \in G \ ; \ t_1, t_2 \in T)$.
Compte tenu de la régularité des matrices considérées, on a :

$$g_1^{-1} g_2 = t_1 t_2^{-1}$$

G et T étant deux sous groupes ; $g_1^{-1} g_2 \in G$ et $t_1 t_2^{-1} \in T$
donc d'après ii) nous avons :

$$\left.\begin{array}{l} g_1^{-1} g_2 = I_n \\ t_1 t_2^{-1} = I_n \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} g_1 = g \\ t_1 = t_2 \end{array}$$

d'où l'unicité de la décomposition.

Exemples classiques de décomposition

1°) Si $G = T_1^-(n,\mathbb{R})$ et $T = T^+(n,\mathbb{R})$, la décomposition de Gauss permet de dire que $T_1^-(n,\mathbb{R})$ décompose $G\ell(n,\mathbb{R})$ suivant $T^+(n,\mathbb{R})$.

2°) Si $G = U(n,\mathbb{R})$ groupe des matrices unitaires réelles (si $A \in U(n,\mathbb{R})$; $A\,A^t = I_n$) d'ordre n.

Si $T = \{t \in T^+(n,\mathbb{R}) \; ; \; t_{ii} > 0 \quad \forall i = 1,n\}$.

Alors le procédé d'orthogonalisation de Schmidt nous permet d'affirmer que G décompose $G\ell(n,\mathbb{R})$ suivant T.

(Il est bien connu que pour assurer l'unicité de la décomposition QT d'une matrice par le procédé de Schmidt, il faut assurer que les éléments diagonaux de la matrice T soient positifs, ce qui nous oblige à utiliser le sous groupe T de $T^+(n,\mathbb{R})$ précédemment décrit ; nous reviendrons plus loin sur ce point important).

DEFINITION 2

Nous dirons que le sous groupe G de $G\ell(n,\mathbb{R})$ décompose continûment $G\ell(n,\mathbb{R})$ suivant T.(sous groupe de $G\ell(n,\mathbb{R})$) si :

1) G décompose $G\ell(n,\mathbb{R})$ suivant T.

2) $\Omega = G.T$ est un ouvert de $G\ell(n,\mathbb{R})$.

3) L'application $\Omega \longrightarrow G\ell(n,\mathbb{R})$

$$A = g.t \longmapsto g$$

est continue ($g \in G$, $t \in T$).

Les exemples classiques donnés plus haut sont des exemples de groupes décomposant continûment $G\ell(n,\mathbb{R})$ suivant T.

DEFINITION 3

Nous dirons qu'une matrice régulière A vérifie les conditions de Rutishauser si

1) A est diagonalisable et ses valeurs propres sont distinctes.
On écrira

$$A = X\,D\,\bar{X}^{1} \text{ avec}$$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

où $|d_1| > |d_2| > \ldots > |d_n| > 0$

2) $\bar{X}^{1}$ se décompose en $\bar{X}^{1} = LR$ ($L \in T_1^-(n,\mathbb{R})$ et $R \in T^+(n,\mathbb{R})$ décomposition de Gauss de $\bar{X}^{1}$).

B - ALGORITHME GR DE RUTISHAUSER [2,3]

Soit G un sous groupe de $G\ell(n,\mathbb{R})$ décomposant $G\ell(n,\mathbb{R})$ suivant T (T sous groupe de $T^+(n,\mathbb{R})$) de façon continue.

DESCRIPTION DE L'ALGORITHME

Soit A une matrice régulière d'ordre n, on construit une suite $\{A_k\}$ de matrices semblables à A, convergente vers une matrice donnant des informations sur les valeurs propres de A.

Dans ce qui suit, nous désignerons par

R_i des éléments de T
G_i des éléments de G

On suppose initialement :

$$A = A_1 = G_1 R_1 \quad \text{puis on forme}$$
$$A_2 = R_1 G_1 = G_2 R_2.$$

C'est-à-dire que l'on suppose que la matrice $A_2 = G_1^{-1} A_1 G_1$ est de nouveau décomposable suivant $G.T$, ou encore on suppose que A_2 appartient à Ω (notations de la première définition).

En faisant toujours ces hypothèses, on est conduit à former la suite des matrices suivantes :

$$A_2 = G_2 R_2$$
$$A_3 = R_2 G_2 = G_3 R_3$$
$$\vdots$$
$$A_n = G_n R_n$$
$$A_{n+1} = R_n G_n = G_{n+1} R_{n+1}$$

Si on peut former cette suite de matrices, on dira que <u>l'algorithme est constructible</u>.

On peut obtenir les formules suivantes :

$$A_{n+1} = G_n^{-1} A_n G_n$$
$$= G_n^{-1} G_{n-1}^{-1} A_{n-1} G_{n-1} G_n.$$

donc finalement

$$\underline{A_{n+1} = G_n^{-1} \ldots G_1^{-1} A G_1 \ldots G_n} \qquad (I)$$

Posons alors

$$g_n = G_1 \ldots G_n$$
$$\rho_n = R_n \ldots R_1$$

G et T étant deux sous groupes de $G\ell(n,\mathbb{R})$, $g_n \in G$ et $\rho_n \in T$.

Nous avons donc d'après (I)

$$A_{n+1} = g_n^{-1} A g_n \text{ où } g_n A_{n+1} = A g_n \qquad \text{(II)}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} g_n \rho_n &= G_1 \ldots G_n R_n \ldots R_1 \\ &= G_1 \ldots G_{n-1} A_n R_{n-1} \ldots R_1 \\ &= g_{n-1} A_n \rho_{n-1} \end{aligned}$$

et d'après (II) :

$$g_n \rho_n = A g_{n-1} \rho_{n-1}$$

d'où par récurrence

$$\boxed{A^n = g_n \rho_n \qquad \text{(III)}}$$

Enonçons alors le :

THEOREME GENERAL DE RUTISHAUSER

Soit A une matrice régulière d'ordre n.

Si

H_1) G (sous groupe de $G\ell(n,\mathbb{R})$) décompose continûment $G\ell(n,\mathbb{R})$ suivant T (sous groupe de $T^+(n,\mathbb{R})$).

H_2) A vérifie les conditions de Rutishauser.

H_3) $A = XDX^{-1}$ avec $X \in \Omega = G.T$ (c'est-à-dire $X = g.t$, $g \in G$ et $t \in T$).

H_4) L'algorithme GR est constructible pour A

alors

1) La suite de matrices (A_i) générée par l'algorithme GR est telle que la diagonale de A_n converge vers D.

2) Si $T = T^+(n,\mathbb{R})$ alors A_n converge vers un élément de $T^+(n,\mathbb{R})$.

La démonstration que nous allons donner est évidemment inspirée de la démonstration de la convergence de l'algorithme LR et de celle de l'algorithme QR de Francis.

.) Nous avons $X = gr \quad (H_3) \quad (g \in G,\ r \in T)$

$$\bar{X}^1 = LR \quad (H_2) \quad (L \in T_1^-(n,\mathbb{R}),\ R \in T^+(n,\mathbb{R}))$$

alors

$$\begin{aligned} A^n &= X\, D^n\, \bar{X}^1 \\ &= gr\, D^n\, LR \\ &= gr\, D^n\, LD^{-n}\, D^n\, R. \end{aligned}$$

A vérifiant les conditions de Rutishauser, si l'on désigne par γ_{ij} les éléments de $D^n\, L\, D^{-n}$, on a

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ 1 & \text{si } i = j \\ \ell_{ij} \left(\dfrac{d_i}{d_j}\right)^n & \text{si } i > j \end{cases}$$

$(L = (\ell_{ij}))$

Or, d'après (H_2) si $i > j$: $\left|\dfrac{d_i}{d_j}\right| < 1$ donc $D^n\, L\, D^{-n} \underset{n\to\infty}{\to} I_n$

ce que nous écrirons

$$\begin{cases} D_n\, L\, D^{-n} = I_n + E_n & \text{(avec n assez grand)} \\ E_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

alors $A^n = gr\,(I_n + E_n)\, D^n\, R$

$$= g\,(I_n + r\, E_n\, \bar{r}^1)\, r\, D^n\, R.$$

Or, il est évident que $I_n + r\, E_n\, \bar{r}^1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I_n$ donc

comme G décompose $G\ell(n,\mathbb{R})$ continûment suivant T pour n assez grand, on écrira :

$$I_n + r\, E_n\, r^{-1} = g_n'\, r_n' \quad (g_n' \in G,\ r_n' \in T)$$

avec de plus $\begin{cases} g_n' \longrightarrow I_n \\ r_n' \longrightarrow I_n \end{cases}$ (unicité de la décomposition G T)

donc $$\boxed{A^n = g\, g_n'\, r_n'\, r\, D^n\, R \qquad (IV)}$$

Considérons alors la formule (III) $A^n = g_n\, \rho_n$, nous devons donc avoir

$$g\, g_n'\, r_n'\, r\, D^n\, R = g_n\, \rho_n \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$(g\, g_n')^{-1}\, g_n = r_n'\, r\, D^n\, R\, \rho_n^{-1}$$

Or, G est un groupe donc $\underline{(g\, g_n')^{-1}\, g_n \in G}$; d'un autre côté $r_n'\, r$ et ρ_n appartiennent bien à T, mais $D^n\, R$ appartient à $T^+(n,\mathbb{R})$ tout entier donc

$$\underline{r_n'\, r\, D^n\, R\, \rho_n^{-1} \text{ appartient à } T^+(n,\mathbb{R})}$$

Mais d'après l'hypothèse iv) de la définition 1, nous savons que

$$G \cap T^+(n,\mathbb{R}) \subset D(n,\mathbb{R})$$

donc il existe une matrice diagonale $\Delta_n \in D(n,\mathbb{R})$ telle que

$$(g\, g_n')^{-1}\, g_n = r_n'\, r\, D^n\, R\, \rho_n = \Delta_n$$

donc $\underline{g\, g_n' = g_n\, \Delta_n^{-1}}$

Mais nous savons que $\lim_{n\to\infty} g_n' = I_n$ donc $\lim_{n\to\infty} g\, g_n' = g$.

Par suite, compte tenu de la formule (II) :

$$A_{n+1} = g_n^{-1}\, A\, g_n.$$

nous pouvons dire que $\lim_{n\to\infty} \Delta_n\, A_{n+1}\, \Delta_n^{-1} = \lim_{n\to\infty} \Delta_n\, g_n^{-1}\, A\, g_n\, \Delta_n^{-1} = g^{-1}\, A\, g$

Alors en remarquant que Δ_n est diagonale, nous avons

$$\text{diag}(A_{n+1}) = \text{diag}(\Delta_n A_{n+1} \Delta_n^{-1})$$

on en déduit

$$\lim_{n\to\infty} \text{diag}\,(A_{n+1}) = \text{diag}\,(\bar{g}^{-1} A g)$$

mais alors

$A = X D \bar{X}^{-1}$ avec $X = g.r$ on a donc

$A = g r D \bar{r}^{-1} \bar{g}^{-1}$ par suite

$\text{diag}\,(\bar{g}^{-1} A g) = \text{diag}\,(r D \bar{r}^{-1}) = D$

Donc on a la conclusion énoncée dans la première partie du théorème à savoir

$$\lim_{n\to\infty} \text{diagonale}\,(A_{n+1}) = D.$$

La deuxième conclusion est classique à démontrer ; il est évident que si $T = T^+(n,\mathbb{R})$ alors $G \cap T = \{I_n\}$.

Si nous revenons à l'égalité

$$g\, g_n'\, r_n'\, r\, D^n\, R = g_n\, \rho_n$$

nous avons par unicité de la décomposition et compte tenu de ce que $(g\, g_n')^{-1}\, g_n \in G$ et $r_n'\, r\, D^n\, R\, \rho_n^{-1} \in T^+(n,\mathbb{R})$.

$$(V) \qquad \begin{cases} g_n = g\, g_n' \\ \rho_n = r_n'\, r\, D^n\, R \end{cases}$$

donc quand n tend vers l'infini $\quad g_n \xrightarrow[n]{} g$

Si nous formons alors $\bar{g}^{-1} Ag = \bar{g}^{-1} X D \bar{X}^{-1} g = \bar{g}^{-1} g r D \bar{r}^{-1} \bar{g}^{-1} g$

$$= r D \bar{r}^{-1}$$

matrice triangulaire supérieure ayant les valeurs propres de A sur la diagonale, on voit en tenant compte de :

$$\begin{cases} A_{n+1} = g_n^{-1} A g_n \\ g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g \end{cases}$$

que

$$\lim_{n\to\infty} A_n = r D r^{-1}$$ ce qu'il fallait démontrer.

———/

C - REMARQUES

Par rapport au théorème initial de Rutishauser, nous voyons que l'introduction de groupes décomposant $G\ell(n,\mathbb{R})$ nous permet seulement d'affirmer dans le cas où $T \subsetneq T^+(n,\mathbb{R})$ que les diagonales des itères convergent vers la diagonale des valeurs propres.

Dans presque tous les cas que nous allons considérer, nous n'utiliserons que $T = T^+(n,\mathbb{R})$.

Des généralisations aux cas de vrais sous groupes de $T^+(n,\mathbb{R})$ semblent intéressantes, mais, à part le groupe des matrices de $T^+(n,\mathbb{R})$ à diagonale strictement positive, les autres sous groupes semblent moins naturels.

On peut aussi essayer d'aller plus loin et chercher à remplacer $T^+(n,\mathbb{R})$ par un autre groupe ; nous montrerons dans un cas très particulier que l'on peut remplacer $T^+(n,\mathbb{R})$ par $T^-(n,\mathbb{R})$ (cette extension étant "facile"), c'est le seul exemple que l'on sache exhiber.

D - CONCLUSION

Le problème qui se pose est le suivant : on connait les deux exemples classiques d'utilisation de l'algorithme précédent :

- l'algorithme LR de Rutishauser
- l'algorithme QR de Francis

liés tous deux aux décompositions classiques du groupe linéaire.

On veut dans ce qui suit essayer de montrer comment construire d'autres algorithmes et en donner une classification.

DEUXIEME PARTIE

LES GROUPES DE DECOMPOSITION DE $G\ell(n,\mathbb{R})$ suivant $T^+(n,\mathbb{R})$

CHAPITRE I

INTRODUCTION A UNE CLASSIFICATION DES GROUPES DE DECOMPOSITION DE $G\ell(n,\mathbb{R})$ suivant $T^+(n,\mathbb{R})$

Le point de départ de cette recherche est la connaissance des deux grandes classes de décomposition connues :

a) La décomposition LR de Gauss, donc l'utilisation de $G = T_1^-(n,\mathbb{R})$

b) La décomposition QR d'orthogonalisation donc l'utilisation de $G = U(n,\mathbb{R})$.

Si on compare ces deux groupes, on voit qu'ils ont même nombre de paramètres, à savoir $\frac{n(n-1)}{2}$, mais par contre qu'ils sont de nature topologique tout à fait distincte

.) $T_1^-(n,\mathbb{R})$ n'est pas compact (pour la topologie naturelle des $\mathbb{R}^{n^2}$)

.) $U(n,\mathbb{R})$ est compact.

On peut donc penser à étudier la classification de tous les sous groupes de $G\ell(n,\mathbb{R})$ compacts ou non ; malheureusement, c'est un problème qui, du moins pour les sous groupes non compacts, n'est pas résolu, et qui est très difficile. On peut penser aussi à considérer uniquement les sous groupes maximaux non compacts (pour l'inclusion), malheureusement bien que des résultats existent dans cette voie (Travaux de Dynkin [1]), il semble qu'il soit encore très difficile de pouvoir aborder une classification.

Néanmoins, une très précieuse indication peut être obtenue en restreignant la classe des groupes auxquels nous nous intéressons et en considérant les sous groupes de Lie de $G\ell(n,\mathbb{R})$.

Nous avons été encouragé dans cette voie par MM. LUNA et VUST de l'Institut de Mathématiques Pures qui nous ont montré que certains groupes se prêtaient à notre étude.

On connaît depuis les travaux de E. Cartan et Gantmacher la classification des sous groupes de Lie simples de $G\ell(n,\mathbb{C})$. Sans entrer dans cette difficile théorie, on peut remarquer qu'il existe 3 grandes séries de groupes simples

= $S\ell(n,\mathbb{C})$ le groupe des matrices de déterminant 1
= $O(n,\mathbb{C})$ le groupe orthogonal
= $Sp(2n,\mathbb{C})$ le groupe symplectique.

Or, $S\ell(n,\mathbb{C})$ ne peut convenir vu son grand nombre de paramètres, donc nous ne pouvons penser à utiliser que les deux derniers qui ont un nombre de paramètres égal ou voisin à celui qui nous intéresse.

Nous allons voir qu'il est possible effectivement d'utiliser le groupe symplectique. Le groupe orthogonal, lui, est utilisé depuis longtemps, néanmoins on considère toujours le groupe orthogonal associé à une forme bilinéaire symétrique définie positive, nous verrons que c'est une restriction qui cache des faits très importants et en utilisant certains résultats théoriques de Graw [2], nous montrerons comment prévoir certaines extensions des méthodes classiques, là aussi de nombreux problèmes non résolus seront présentés.

De toute façon, nous ne considérerons que les formes réelles de ces groupes.

Une fois étudiées ces décompositions "simples", nous nous intéresserons à des décompositions que nous appellerons "semi-simples" toujours par analogie avec la classification des groupes de Lie.

Nous introduirons dans cette partie un groupe $\Sigma_1(2n,\mathbb{R})$ qui permet une décomposition du groupe linéaire, puis nous montrerons comment construire toute une famille de groupes de décomposition à partir de la famille des groupes simples qui engendreront une famille d'algorithmes que nous appellerons algorithmes à masques.

C'est alors que nous pourrons constater que l'algorithme LR trouve son cadre dans cette famille comme algorithme associé au groupe $T_1^-(n,\mathbb{R})$ qui sera introduit comme groupe limite ; il sera aussi fait un rapprochement entre la décomposition LR classique et la décomposition dite de "Bruhat généralisée" qui permet de mettre en évidence, de façon naturelle, les matrices de permutations qui jouent un rôle fondamental dans la décomposition de Gauss.

Donc le schéma des chapitres suivants est :

LES ALGORITHMES SIMPLES

.) Algorithmes d'orthogonalisation

.) Algorithmes de Symplectisation

LES ALGORITHMES SEMI-SIMPLES

.) Algorithme Σ_1

.) Algorithmes à masques

LES ALGORITHMES LIMITES

.) Algorithme de Gauss

.) Algorithme de Bruhat.

CHAPITRE II

LES ALGORITHMES D'ORTHOGONALISATION

§1) INTRODUCTION AUX ALGORITHMES D'ORTHOGONALISATION

Il y a deux façons d'aborder le problème de l'orthogonalisation :

1°) Soit on utilise un procédé du type procédé d'Hilbert Schmidt.

La base de ce procédé est bien connue dans le cas d'une forme bilinéaire symétrique définie positive, il repose sur le fait qu'un espace muni d'une géométrie orthogonale est somme orthogonale de droites. Nous allons montrer comment étendre de façon naturelle ce procédé à une forme bilinéaire symétrique non dégénérée quelconque.

2°) Soit on utilise un procédé du type "générateurs" (ou élimination

La base de ce procédé est d'utiliser "en élimination" les générateurs du groupe orthogonal afin de transformer la matrice donnée en une matrice triangulaire supérieure.

Exemple : LE PROCEDE D'HOUSEHOLDER

Ce procédé a son explication ultime dans le théorème suivant dû à E. Cartan [1].

THEOREME

> Toute transformation orthogonale sur un corps de caractéristique $\neq 2$ est un produit de n symétries au plus.

(Pour une démonstration plus détaillée, voir Dieudonné [2]).

Le procédé décrit par Householder consiste à utiliser des symétries par rapport à des hyperplans convenables de manière à ce que la matrice $S_n \ldots S_1 A$ (les S_i désignant les matrices associées aux symétries) soit triangulaire supérieure.

Exemple : LA METHODE DES ROTATIONS (Gastinel [3] p. 103)

Elle a pour explication le théorème suivant d'E. Cartan.

THEOREME

> Toute rotation est un produit d'un certain nombre de rotations élémentaires dont les plans sont orthogonaux. Tout renversement est le produit d'un certain nombre de rotations simples de même nature et d'une réflexion par rapport à un hyperplan contenant les plans de toutes les rotations simples.

(Pour une démonstration, voir E. Cartan [1]).

Le procédé des "rotations" est l'application de ce théorème.

Nous donnerons une indication sur la façon dont on peut étendre ces résultats au cas "non euclidien".

§2) L'ORTHOGONALISATION AU SENS DE HILBERT-SCHMIDT-GRAEV

A - GENERALITES SUR LES FORMES BILINEAIRES SYMETRIQUES DEFINIES

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n.
Soit B une forme bilinéaire symétrique définie sur E.

D'après les théorèmes classiques de réduction (Shclov [4]), on sait qu'il est possible de déterminer une base de E telle que dans cette base, B puisse se mettre sous la forme canonique :

$$B(X,Y) = X^t\ G\ Y$$

où G est une matrice diagonale ayant sur la diagonale des +1 ou des -1 et que ce nombre est indépendant du choix de la base canonique d'après la loi d'inertie de Sylvester.

Nous noterons G_p la matrice "réduite" suivante :

$$G_p = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \} p \\ \\ \\ \} n-p \end{matrix}$$

La forme bilinéaire sera $B_p(X,Y) = X^t\ G_p\ Y$

La terminologie habituelle d'orthogonalité est encore utilisée, et l'on sait en particulier qu'il existe dans ces espaces à géométries orthogonales des vecteurs de trois types :

.) vecteurs spaciaux définis par $B_p(X,X) > 0$

.) vecteurs temporels définis par $B_p(X,X) < 0$

.) vecteurs isotropes définis par $B_p(X,X) = 0$

DEFINITION

Soit $B_p(X,Y) = X^t G_p Y$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$ (G_p ayant la signification décrite plus haut).

Nous dirons que $A \in Gl(n,\mathbb{R})$ est B_p-orthogonale si et seulement si

$$A^t\ G_p\ A = G_p$$

Nous noterons $O_p(n,\mathbb{R})$ le groupe multiplicatif de ces matrices B_p-orthogonales.

DEFINITION

Soit B_p la forme bilinéaire symétrique non dégénérée définie plus haut.

Soit A une matrice appartenant à $M(n,\mathbb{R})$.

Nous appellerons matrice de Gram associée à A la matrice appartenant à $M(n,\mathbb{R})$ définie par

$$G(A) = (B_p\ (A._i, A._j))$$

DEFINITION (Graev)

Soit $A \in G\ell(n,\mathbb{R})$; nous dirons que A n'est pas exceptionnelle si les mineurs principaux de la matrice G(A) associée sont différents de zéro.

La remarque importante pour la suite est la suivante :

Soient $\{y_n\}$ n vecteurs linéairement indépendants et B_p-orthogonaux ($B_p(y_i,y_j) = \pm\delta_{ij}$ $\forall i$ et $\forall j$).

D'après la loi d'inertie de Sylvester, la nouvelle base possèdera exactement p vecteurs spaciaux, n-p vecteurs temporels.

DESCRIPTION DU PROCEDE

Soit $A \in G\ell(n,\mathbb{R})$ non exceptionnelle

(Nous noterons $A._i$ la $i^{ème}$ colonne de la matrice A).

1ère ETAPE

Considérons $A._1$, puisque le premier mineur de G(A) n'est pas nul. On a $B_p(A._1, A._1) \neq 0$, donc on peut mettre en évidence un scalaire λ_{11} tel que $C_1 = \lambda_{11}\ A._1$ vérifie $B_p(C_1,C_1) = \pm 1$.

2ème ETAPE

Pour continuer la récurrence, nous avons alors besoin du lemme classique suivant :

LEMME

Si T est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E de dimension finie n sur k et si $(x_i)_{i=1,n}$ sont n vecteurs de E, ils forment une base si et seulement si $\det (T(x_i,x_j)) \neq 0$.

Et si $(x'_i)_{i=1,n}$ est un autre système de n éléments de E tels que $x'_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_j$, alors on a la relation

$$\det (T(x'_i,x'_j)) = \det (C_{ij})^2 \det (T(x_i,x_j)).$$

(Pour une démonstration, voir Chevalley [6] exposé 5-01).

Considérons alors $C'_2 = \lambda'_{12}\, C_1 + A._2$. Nous pouvons toujours déterminer λ'_{12} de façon que $B_p(C'_2,C_1) = 0$, si nous considérons alors

$$\det \begin{pmatrix} B(C_1,C_1) & B(C_1,C'_2) \\ B(C'_2,C_1) & B(C'_2,C'_2) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ \lambda'_{12} & 1 \end{pmatrix}^2 \det \begin{pmatrix} B(A._1,A._1), B(A._1,A._2) \\ B(A._2,A._1), B(A._2,A._2) \end{pmatrix}$$

comme $\lambda_{11} \neq 0 \Rightarrow$

$$\pm B_p(C'_2,C'_2) = \lambda_{11}^2\, \Delta_2(G(A))$$

(Δ_2 désignant le deuxième mineur principal de G(A)), de ce fait $B_p(C'_2,C'_2) \neq 0$, donc il existera toujours un scalaire λ_{22} tel que

$$C_2 = \lambda'_{12}\, \lambda_{22}\, C_1 + \lambda_{22}\, A._2$$
$$= \lambda_{12}\, C_1 + \lambda_{22}\, A._2$$

vérifie

.) $B_p(C_2,C_2) = \pm 1$

.) $B_p(C_1,C_2) = 0.$

$i^{ème}$ ETAPE

On pose

$$C'_i = \lambda'_{1i}\, C_1 + \ldots + \lambda'_{i-1,i}\, C_{i-1} + A_{\cdot i}$$

On détermine les constantes λ'_{ji} en écrivant les relations d'orthogonalité d'après le lemme énoncé et compte tenu du fait que la matrice "de passage" est triangulaire avec $\lambda_{11} \ldots \lambda_{i-1,i-1} \neq 0$ on en déduit les possibilités de déterminer un scalaire λ_{ii} tel que $B_p(\lambda_{ii}\, C'_i, \lambda_{ii}\, C'_i) = \pm 1$.

- On achève alors la récurrence et de ce fait on prouve le théorème

THEOREME (Graev)

> Si A est non exceptionnelle, il existe une matrice triangulaire supérieure régulière R telle que $AR = \hat{A}$ soit telle que $B_p(\hat{A}_{\cdot i}, \hat{A}_{\cdot i}) = \pm 1$.
> Il existe p vecteurs colonnes $\hat{A}_{\cdot i}$ de type spacial et n-p de type temporel.

La dernière partie du théorème étant une conséquence immédiate de la remarque précédant la description du procédé d'orthogonalisation.

On peut énoncer ce théorème de manière plus précise en remarquant qu'il existe une matrice de permutation P telle que $\hat{A}P$ ait dans ses p premières colonnes les vecteurs spaciaux et dans ses n-p dernières les vecteurs temporels.

Donc

COROLLAIRE

> Si A est une matrice non exceptionnelle, il existe une matrice triangulaire supérieure régulière R telle que
>
> $$A = G\, P\, R$$
>
> où $G \in O_p(n, \mathbb{R})$
> P matrice de permutation
> R matrice triangulaire supérieure régulière.

CONCLUSION

Nous n'irons pas plus avant dans la description de ces types de procédés, en effet, du point de vue numérique (qui est le but de notre étude !) l'existence de cette matrice de permutation est un très lourd handicap.

Tant que nous ne sommes pas en mesure de déterminer des classes de matrices qui soient telles que la matrice de permutation soit donnée "canoniquement", nous ne pouvons espérer utiliser de telles décompositions.

Néanmoins, théoriquement, ce procédé semble être d'une importance capitale vue l'analogie qui existe entre ces résultats et les résultats que nous énoncerons pour l'algorithme LR(décomposition de Bruhat).

> Un très grand travail reste donc à faire dans cette direction, nous présentons dans la partie relative aux applications un procédé pratique pour éviter de considérer la matrice de permutation.

§3) QUELQUES MOTS SUR "L'ELIMINATION" (cas orthogonal)

Nous venons de voir comment utiliser l'idée de l'orthogonalisation de Schmidt-Hilbert pour générer des décompositions, maintenant il faut se poser le problème des procédés type générateurs.

Sans nous étendre sur des résultats qui sont faciles à prévoir, nous allons indiquer la méthode à employer.

Elle repose en fait sur des théorèmes identiques aux théorèmes de Cartan que nous avons énoncés dans le cas des formes bilinéaires symétriques définies positives.

En fait, on peut accéder à plus de généralités en reprenant une idée de Scherk [5] qui consiste en ceci :

Soit G une matrice régulière symétrique ; on définit la forme quadriatique $\Omega(X,Y) = X^t G Y$ symétrique.

On dit que

1) $A \in M(n,\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^t G A = G$

2) $A \in M(n,\mathbb{R})$ est une symétrie si

.) A est orthogonale

.) rang (A-I) = 1.

On prouve alors le théorème suivant :

THEOREME

On a l'équivalence

.) A est une symétrie

.) $\exists$ a non isotrope tel que $A = I - \frac{2aa^tG}{a^tGa}$

.) A transforme un vecteur non isotrope a en -a et laisse invariant l'hyperplan perpendiculaire à a.

qui est l'outil nécessaire pour démontrer le

THEOREME

Toute matrice orthogonale au sens précédent est le produit d'au moins rang(T-I) symétries.

Ceci permet naturellement de conduire une élimination du genre de Householder.

Pour conduire une élimination du type de Givens à savoir l'utilisation de rotations élémentaires, on utilise alors le théorème suivant (Dieudonné [2]).

THEOREME

> Pour $n \geq 2$ et $\nu \geq 1$, toute rotation est un produit de rotations hyperboliques (rotations dont le plan est hyperbolique).

(ν = indice de la forme fondamentale).

CONCLUSION

On voit donc dans le cadre général des procédés d'orthogonalisation comment étendre les cas de la forme bilinéaire symétrique définie positive.

Nous n'avons pas poursuivi dans cette voie, car il est important de connaître les classes de matrices "stables" pour l'algorithme, problème totalement ouvert.

Néanmoins, nous indiquerons dans la partie III quelques résultats numériques obtenus dans cette direction.

Il serait, par exemple, très intéressant dans un premier temps de savoir si au bout d'un certain nombre d'itérations, un algorithme du type GR conduit à des matrices toujours dans la même classe définie par les matrices de permutation.

CHAPITRE III

THEORIE ET PRATIQUE DU PROCEDE DE SYMPLECTISATION

Dans ce chapitre, nous ne travaillerons que dans le groupe $G\ell(2n,\mathbb{R})$.

§1) LE GROUPE SYMPLECTIQUE

A - RAPPELS DE GEOMETRIE

Soient E un espace vectoriel sur le corps des réels et Ω une forme bilinéaire alternée sur E.

Nous rappelons qu'une forme bilinéaire est dite alternée si elle vérifie

$$(*) \quad \forall x \in E \ ; \ \Omega(x,x)=0$$

Comme nous travaillons sur le corps des réels, (de caractéristique $\neq 2$) la condition (*) est équivalente à

$$(**) \quad \forall x,y \in E \ ; \ \Omega(x,y) = -\Omega(y,x)$$

Nous supposerons que cette forme n'est pas dégénérée, c'est-à-dire que son noyau $E^{\perp}$ est réduit à $\{0\}$:

$$E^{\perp} = \{x \in E \ ; \ \forall y \in E \quad \Omega(x,y) = 0\} = \{0\}.$$

Ω étant une forme bilinéaire, nous pouvons définir comme dans le cas symétrique les notions d'orthogonalité :

DEFINITIONS

x et y étant deux vecteurs de E, nous dirons que deux vecteurs sont Ω-orthogonaux (ou orthogonaux quand aucune confusion n'est à craindre) s'ils vérifient

$$\Omega(x,y) = 0$$

. Si $x \in E$ et si V est un sous espace vectoriel de E (ou une partie quelconque de E), nous dirons que x est Ω-orthogonal à V si et seulement si

$$\Omega(x,y) = 0 \quad \forall y \in V$$

. Si V_1 et V_2 sont deux parties de E, nous dirons que V_1 est Ω-orthogonal à V_2 si et seulement si

$$\Omega(x,y) = 0 \quad \forall x \in V_1 \text{ et } \forall y \in V_2$$

REMARQUE : Avec cette terminologie et compte tenu du fait que Ω est alternée, tout vecteur est Ω-orthogonal à lui-même ; ce que nous exprimerons en disant que tout vecteur est isotrope.

DEFINITION

Si E est somme directe de sous espace E_i deux à deux orthogonaux, on dira que E est somme orthogonale de E_i.

On notera ceci $E = E_1 \perp E_2 \perp \ldots \perp E_p$.

Nous allons maintenant donner une définition qui est fondamentale pour ce qui suit :

DEFINITION

On appelle plan hyperbolique tout sous espace vectoriel V de E, de dimension 2 et non dégénéré (c'est-à-dire $V^\perp = \{x \in V, \Omega(x,y) = 0 \quad \forall y \in V\} = \{0\}$).

On peut voir facilement qu'un plan (de dimension 2) dans E contenant deux vecteurs Ω-orthogonaux n'est pas hyperbolique.

Une propriété importante d'un plan hyperbolique **H est** la suivante :

Soit $x \neq 0$ un élément de H, il existe alors forcément dans H un élément $\tilde{y}$ tel que $\Omega(x,\tilde{y}) \neq 0$.
(En effet si $\forall z \in H \quad \Omega(x,z) = 0$ alors $x \in H^{\perp}$ or $H^{\perp} = \{0\}$ d'après l'hypothèse H non dégénérée, donc $x = 0$ ce qui est en contradiction avec $x \neq 0$).

Soit $q = \Omega(x,\tilde{y})$, si nous considérons $y = \frac{1}{q}\tilde{y}$, nous avons $\Omega(x,y) = 1$.

Donc, dans un plan hyperbolique (en se donnant un $x \neq 0$) nous pouvons toujours mettre en évidence un couple de vecteurs (x,y) tels que leur produit soit égal à 1.

DEFINITION

Une base (x,y) d'un plan hyperbolique telle que $\Omega(x,y) = 1$ est appelée base hyperbolique de ce plan.

DEFINITION

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni d'une forme Ω bilinéaire alternée. On dira que E est un espace hyperbolique si E est somme Ω-orthogonale de plans hyperboliques.

Remarque fondamentale : Un espace hyperbolique est de dimension paire.

THEOREME

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une forme alternée Ω non dégénérée, alors E est un espace hyperbolique.

La démonstration se conduit par récurrence (pour plus de détails voir Artin [1]).

Soit $x \in E$ non nul, comme Ω est non dégénérée il existe y dans E tel que $\Omega(x,y) \neq 0$, le plan $H = \{x,y\}$ est non dégénéré donc hyperbolique et l'on peut écrire $E = H \oplus H^{\perp}$ avec $H^{\perp}$ non dégénéré.

La récurrence se continue sur $H^{\perp}$.

CONCLUSION

Si H est un plan hyperbolique muni d'une base {x,y} hyperbolique la matrice de la forme Ω dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc nous avons le résultat de réduction suivant :

Si E est un espace hyperbolique, il existe dans E une base telle que la matrice de la forme Ω dans cette base soit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'usage courant veut que l'on n'utilise pas cette forme de la matrice mais la forme dite "standard" obtenue par permutation des indices et qui s'écrit

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

où 0_n est la matrice de taille n identiquement nulle et

I_n est la matrice de taille n identité.

NOTATION

Dans tout ce qui suit, nous allons considérer une base adaptée à la forme alternée $\Omega(x,y) = x^t J y$, c'est-à-dire une base $(e_i)_{i=1,\ldots 2n}$ telle que

$$\overline{\Omega}(e_i,e_j) = \begin{cases} 0 & \forall j \neq i+n \\ & (i < j) \\ 1 & j = i+n \end{cases}$$

B - LE GROUPE SYMPLECTIQUE

DEFINITION

> Le groupe des automorphismes de $\mathbb{R}^{2n}$ muni de la forme bilinéaire alternée $\Omega(x,y) = x^t J y$ sera appelé groupe symplectique et noté $Sp(2n,\mathbb{R})$.

Par définition, une matrice $A \in Sp(2n,\mathbb{R})$ vérifie donc :

$$\Omega(Ax,Ay) = \Omega(x,y) \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^{2n} \quad \text{donc}$$

elle vérifie

$$A^t J A = J \qquad \text{et par suite}$$

$$Sp(2n,\mathbb{R}) = \{A \in G\ell(2n,\mathbb{R}) \ ; \ A^t J A = J\}.$$

Exemples et propriétés des matrices symplectiques

1°) Matrices symplectiques diagonales

Soit $D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$ une matrice diagonale et cherchons à quelles conditions cette matrice est symplectique.

$$D^t J D = \left(\begin{array}{c|c} 0_n & D_1 D_2 \\ \hline -D_1 D_2 & 0_n \end{array}\right)$$ donc D sera symplectique si et seulement si $D_1 D_2 = I_n$.

Donc les matrices diagonales symplectiques ont la forme

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_n & & & \\ & & & d_1^{-1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & d_n^{-1} \end{pmatrix}$$

2°) Afin de "construire" presque toutes les matrices symplectiques, nous allons utiliser un procédé très utilisé au XIX^{ème} siècle et qui est le procédé de paramétrisation de Cayley.

Pour cela, nous allons rappeler l'exposé de Weyl de ce procédé appliqué au Groupe Symplectique.

Soit A une matrice n'ayant pas 1 comme valeur propre.
Soit S une matrice telle que

(*) $I + S = 2(I+A)^{-1}$

On a alors les relations suivantes entre S et A :

$$\text{(I)} \quad S = (I-A)(I+A)^{-1} = (I+A)^{-1}(I-A)$$

$$\text{(II)} \quad A = (I-S)(I+S)^{-1} = (I+S)^{-1}(I-S)$$

Démontrons par exemple (I)

De $I+S = 2(I+A)^{-1}$ on déduit $I+A = 2(I+S)^{-1}$ donc

$I-A = 2[I-(I+S)^{-1}]$ par suite

$$(I-A)(I+A)^{-1} = [I-(I+S)^{-1}][I+S]$$
$$= I+S-I = S$$

La deuxième partie de l'égalité résultant de l'égalité évidente

$$(I+A)(I-A) = (I-A)(I+A).$$

La démonstration de (II) étant tout à fait identique.

On démontre alors le théorème suivant :

THEOREME DE WEYL

Si A et S sont deux matrices n'ayant pas 1 comme valeur propre liées par les deux relations (I) et (II) précédentes, alors on a l'équivalence des deux propriétés suivantes :

i) A est symplectique

ii) $S^tJ + J S = 0$

(H. WEYL p. 169 [2]).

Ce théorème nous permet d'écrire pour S vérifiant (*) de la forme

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix} \qquad (S_i \in G\ell(n,\mathbb{R})) :$$

$$S^tJ + JS = 0 \quad <=> \quad \begin{cases} S_3^t = S_3 \\ S_2^t = S_2 \\ S_4^t + S_1 = 0 \end{cases}$$

Nous tirons de cette remarque les deux résultats (importants pour ce qui suit) suivants

⁂) Nous avons une méthode théorique pour construire presque toutes les matrices symplectiques (sauf celles ayant 1 comme valeur propre).

⁂) On voit que par S_3 la matrice S dépend de $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres

S_2 la matrice S dépend de $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres

S_1 et S_4 la matrice S dépend de n^2 paramètres.

donc :

LEMME

$Sp(2n,\mathbb{R})$ est un groupe de matrices dépendant continuement de $2n^2+n$ paramètres.

On aurait pu énoncer le résultat en disant que $Sp(2n,\mathbb{R})$ est un groupe de Lie réel de dimension $2n^2+n$ ($2n^2+n$ étant la dimension de la variété différentiable sous jacente au groupe $Sp(2n,\mathbb{R})$).

Il est évident que dans notre cadre une telle terminologie et l'aspect "différentiel" du groupe ne présentent aucun intérêt.

3°) Enonçons enfin le résultat évident suivant :

Si A est symplectique alors A^t est aussi symplectique.

§2) LE PROCEDE DE SYMPLECTISATION [3]

Nous avons vu dans le cadre des géométries orthogonales :::: que les procédés d'orthogonalisation reviennent à décomposer l'espace en somme orthogonale de droites qui forment une base orthogonale de l'espace.

Il est parfaitement clair que nous ne pouvons espérer cela dans le cadre d'une géométrie symplectique, car si l'on avait $E = \oplus \mathbb{R} x_i$ avec les droites $\mathbb{R}x_i$ orthogonales entre elles, alors comme chaque x_i est isotrope, le noyau de la forme serait égal à tout l'espace.

Par contre, la clef de la question est que tout espace de dimension paire muni d'une forme symplectique non dégénérée est un espace hyperbolique, c'est-à-dire somme orthogonale de plans hyperboliques.

Le procédé de symplectisation n'est rien d'autre que la réalisation de la décomposition de l'espace en somme orthogonale de plans hyperboliques.

Nous allons donc nous donner un ensemble de 2n vecteurs ξ_i formant une base de E (espace vectoriel réel) et nous allons construire la somme orthogonale de n plans hyperboliques H_i orthogonaux, plans possédant chacun une base hyperbolique, ce qui donnera une base hyperbolique de E.

Nous garderons les notations du 1er paragraphe :

$$\Omega(x,y) = X^t J Y$$

PREMIERE ETAPE : FORMATION DU PREMIER PLAN HYPERBOLIQUE

a) On considère $C_1 = \xi_1 \ (\neq 0)$

b) On forme alors $\Omega(C_1, \xi_{n+1}) = q_1$ deux possibilités se présentent alors

---

:::: C'est-à-dire dans l'étude des espaces munis de formes bilinéaires symétriques.

b1) $q_1 \neq 0$ (C'est le cas presque partout puisque $q_1 = 0$ n'est réalisé que sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle).

Dans ce cas on posera $C_{n+1} = \frac{1}{q_1} \xi_{n+1}$ et l'on aura $\Omega(C_1, C_{n+1}) = 1$, ce qui conduit d'après la définition à la construction d'une base hyperbolique du premier plan hyperbolique $H_1 = \{C_1, C_{n+1}\}$.

b2) $q_1 = 0$, dans ce cas nous considérerons les divers $\Omega(C_1, \xi_i)$ avec $i \neq n+1$.

Il existe alors un i tel que $\Omega(C_1, \xi_i) \neq 0$ (sinon compte tenu de l'isotropie de C_1, le noyau de la forme ne serait pas nul, ce qui contredit le fait que la forme n'est pas dégénérée.)

On formera alors $q_1 = \Omega(C_1, \xi_i)$ et nous poserons $C_{n+1} = \frac{1}{q_1} \xi_i$, le plan $\{C_1, C_{n+1}\}$ est hyperbolique de base C_1, C_{n+1}.

$i^{ème}$ ETAPE : FORMATION DU $i^{ème}$ plan hyperbolique

a) On pose

$$C_i = \xi_i + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_{i-1} C_{i-1} + \lambda_{n+1} C_{n+1} + \ldots + \lambda_{n+i-1} C_{n+i-1}$$

$$\theta_i = \xi_{n+i} + \mu_1 C_1 + \ldots\ldots + \mu_{i-1} C_{i-1} + \mu_{n+1} C_{n+1} + \ldots + \mu_{n+i-1} C_{n+i-1}$$

b) On impose les conditions d'orthogonalité

$$\Omega(C_i, C_k) = 0 \quad \forall k = 1, \ldots, i-1, n+1, \ldots, n+i-1$$

$$\Omega(\theta_i, C_k) = 0 \qquad " \qquad "$$

Ce qui détermine les constantes, intervenant dans les sommes de a).

c) On "normalise" le plan $\{C_i, \theta_i\}$ en formant

$$q_i = \Omega(C_i, \theta_i)$$

deux possibilités

1) $q_i \neq 0$ (Comme nous l'avons déjà remarqué, cette condition est vérifiée presque partout), auquel cas on posera $C_{n+i} = \frac{1}{q_i}\theta_i$ et l'on aura le $i^{ème}$ plan hyperbolique $H_i = \{C_i, C_{n+i}\}$.

2) $q_i = 0$ auquel cas nous allons considérer parmi les vecteurs restants (et d'après leur propriété d'indépendance linéaire n'appartenant pas aux i-1 premiers plans hyperboliques) un vecteur tel que

$$\theta'_i = \xi_j + \mu'_1 C_1 + \ldots + \mu'_{i-1} C_{i-1} + \mu'_{n+1} C_{n+1} + \ldots + \mu'_{n+i-1} C_{n+i-1}$$

une fois les constantes déterminées vérifie $q'_i = \Omega(C_i, \theta'_i) \neq 0$ (un tel vecteur existe sinon on aurait par un raisonnement analogue à celui fait dans la 1ère partie une contradiction avec le fait que la forme Ω n'est pas dégénérée).

En posant $C_{n+i} = \frac{1}{q'_i}\theta'_i$ on construit le $i^{ème}$ plan hyperbolique.

Le processus s'arrête naturellement en n étapes, et nous obtenons la décomposition de l'espace hyperbolique E en somme orthogonale H_i.

Exemple : Si l'on se place dans $\mathbb{R}^4$

$$\xi_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \xi_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \xi_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad \xi_4 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

1°) On prendra $C_1 = \xi_1$

On remarque $\Omega(C_1,\xi) = C_1^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_3 = +2$ donc on prendra $C_3 = \begin{vmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{vmatrix}$

$$H_1 = (C_1, C_3)$$

2°) On posera $C_2 = \xi_2 + a\, C_1 + b\, C_3$

$$\theta_4 = \xi_4 + a'\, C_1 + b'\, C_3$$

En imposant les conditions d'orthogonalité et de normalisation on trouvera :

$$C_2 = \begin{vmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \\ -1/2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad C_4 = \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$H_2 = (C_2, C_4)$$

3°) On a la décomposition hyperbolique

$$\mathbb{R}^4 = H_1 \perp H_2 .$$

§3) LA DECOMPOSITION SYMPLECTIQUE NON NORMALISEE

Les diverses décompositions orthogonales étudiées dans le chapitre précédent étaient basées sur l'application du procédé d'orthogonalisation d'Hilbert-Schmidt-Graev. Nous allons montrer qu'il est possible d'obtenir des décompositions de matrices compte tenu du procédé de Symplectisation décrit au paragraphe précédent.

Néanmoins, certains difficultés se présentent qui sont liées à la "position" relative des groupes symplectiques et triangulaires.

A - REMARQUES PRELIMINAIRES

DEFINITION

Soient A et B deux sous groupes de $G\ell(n,\mathbb{R})$, nous dirons que A et B sont en bonne position si :

1) en désignant par n_1 le nombre de paramètres de A
2) en désignant par n_2 le nombre de paramètres de B

nous avons

$$.)\ n_1 + n_2 = n^2$$

et de plus si nous avons la condition ensembliste :

$$.)\ A \cap B = \{I_n\}$$

(I_n matrice unité de $G\ell(n,\mathbb{R})$).

Cette définition est en fait la traduction dans notre cas très particulier d'une notion de géométrie analytique qui est la notion de "position générale".

(Voir une introduction à cette difficile notion dans Wallace [4]).

Exemples

Si nous considérons les décompositions classiques, nous avons des exemples de groupes en bonne position :

a) Soit $A = T_1^-(n,\mathbb{R})$

$B = T^+(n,\mathbb{R})$

avec les notations de la définition : $n_1 = \frac{n(n-1)}{2}$

$$n_2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

donc $n_1 + n_2 = n^2$.

D'autre part, il est évident que $A \cap B = \{I_n\}$, donc ces deux groupes sont en bonne position.

b) Si $A = O(n,\mathbb{R})$ le groupe orthogonal

$B = T^+_*(n,\mathbb{R})$ groupe des matrices triangulaires supérieures régulières à diagonale positive

il est facile de montrer que A et B sont en bonne position.

L'intérêt de cette notion apparaît dans le cas du groupe symplectique :

LEMME

$Sp(2n,\mathbb{R})$ et $T^+(2n,\mathbb{R})$ ne sont pas en bonne position.

Il y a deux raisons à cela

Si $A = Sp(2n,\mathbb{R})$

$B = T^+(2n,\mathbb{R})$ avec les notations de la définition :

$$n_1 = 2n^2 + n$$

$$n_2 = n(2n+1)$$

donc $n_1 + n_2 = 4n^2 + 2n$ donc nous avons 2n "paramètres" en trop.

La deuxième raison est plus profonde : <u>les deux groupes considérés sont très imbriqués</u>.

Considérons en effet l'intersection de ces deux groupes : c'est-à-dire cherchons les matrices triangulaires supérieures symplectiques, elles doivent vérifier

$$\begin{pmatrix} R_1^t & 0 \\ T^t & R_2^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_1 & T \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$ ce qui impose

$$\begin{cases} R_1^t\ R_2 = I & (1) \\ R_2^t\ T = T^t\ R_2 & (2) \end{cases}$$

(1) est équivalente à $R_1 = D_1$ et $R_2 = D_1^{-1}$ (D_1 matrice de $G\ell(n,\mathbb{R})$ diagonale)

(2) devient alors $D_1^{-1} T = T^t D_1^{-1} \quad \Rightarrow \quad T^t = D_1^{-1} T D_1$.

On voit qu'en particulier T pourra être diagonale.

EN CONCLUSION

> Pour obtenir une décomposition unique d'une matrice suivant ces deux groupes, il faudra que deux choses soient possibles :
>
> (1) Considérer non pas les deux groupes complets mais fixer certains paramètres d'un des deux groupes.
>
> (2) Séparer les deux groupes qui ont une intersection trop grande.

Ces deux objectifs sont atteints grâce à l'algorithme suivant :

B - DESCRIPTION DE L'ALGORITHME SYMPLECTIQUE (CAS NON NORMALISE)

Soit A une matrice régulière appartenant à $G\ell(2n,\mathbb{R})$; nous désignerons ses colonnes par $A._i$ ($i=1,\ldots,2n$).

> Dans tout ce qui suit, nous supposerons être dans un cas "générique" c'est-à-dire nous supposerons que les divers produits scalaires qui interviennent dans les normalisations (voir la symplectisation) ne sont pas nuls.

PREMIERE ETAPE

a) On pose $C_1 = A._1$

b) On forme alors $\Omega(C_1, A._{n+1}) = q_1$ ($\neq 0$ par hypothèse) et l'on écrit $C_{n+1} = \frac{1}{q_1} A._{n+1}$

Si l'on considère la matrice

$$A_1 = (C_1, A._2, \ldots, A._n, C_{n+1}, A._{n+2} ; \ldots ; A._{2n})$$

on a

$$A_1 = A\,\gamma_1$$

avec $\gamma_1 = I_{2n} + (\lambda_{11}-1)\, E_{n+1,n+1}$ en posant $\lambda_{11} = \frac{1}{q_1}$

et $E_{n+1,n+1}$ matrice 2n x 2n ayant un 1 en position n+1,n+1 et 0 ailleurs.

Décrivons pour plus de clarté la deuxième étape avant de passer au cas général :

DEUXIEME ETAPE

a) On pose $C_2 = A._2 + \lambda_{12}\, C_1 + \lambda_{n+1,2}\, C_{n+1}$

$$\theta_2 = A._{n+2} + \mu_{1,n+2}\, C_1 + \mu_{n+1,n+2}\, C_{n+1}$$

b) On calcule les constantes en imposant

$$\begin{cases} \Omega(C_1, C_2) = 0 \\ \Omega(C_2, C_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} \Omega(C_1, \theta_2) = 0 \\ \Omega(\theta_2, C_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

c) On forme

$$\Omega(C_2, \theta_2) = q_2$$

on introduit alors $\lambda_{n+2,n+2} = \frac{1}{q_2}$ et on considère le vecteur

$$C_{n+2} = \lambda_{n+2,n+2}\, \theta_2 \text{ que nous écrirons}$$

$$= \lambda_{n+2,n+2}\, A._{n+2} + \lambda_{n+1,n+2}\, C_{n+1} + \lambda_{1,n+2}\, C_1$$

Nous avons alors

$$A_2 = (C_1,\ C_2,\ A._3,\ \dots,\ C_{n+1},\ C_{n+2},\ A._{n+3},\ \dots,\ A._{2n})$$

avec

$$A_2 = A_1\ \gamma_2 \quad \text{et}$$

$$\gamma_2 = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & \lambda_{12} & & & 0 & \lambda_{1,n+2} & & \\
 & 1 & 0 & & & & & \\
 & & 1 & & & & 0 & \\
 & 0 & & 1 & & & & \\
\hline
 & \lambda_{n+1,2} & & & 1 & \lambda_{n+1,n+2} & & \\
 & & & & & \lambda_{n+2,n+2} & & \\
 & & & & & & 1 & \\
 & 0 & & & 0 & & & 1
\end{array}\right)$$

$i^{\text{ème}}$ ETAPE DE L'ALGORITHME

Nous avons alors :

$$A_{i-1} = A\ \gamma_1\ \gamma_2 \cdots \gamma_{i-1}$$

$$= (C_1, C_2, \dots, C_{i-1}, A._i, \dots, A._n, C_{n+1}, \dots, C_{n+i-1}, A._{n+i}; \dots ; A._{2n})$$

a) Posons

$$C_i = A._i + \lambda_{1,i} C_1 + \dots + \lambda_{i-1,i}\ C_{i-1}$$
$$+ \lambda_{n+1,i}\ C_{n+1} + \dots + \lambda_{n+i-1,i}\ C_{n+i-1}$$

$$\theta_i = A._{n+i} + \mu_{1,n+i}\ C_1 + \dots + \mu_{i-1,n+i}\ C_{i-1}$$
$$+ \mu_{n+1,n+i}\ C_{n+1} + \dots + \mu_{n+i-1,n+i}\ C_{n+i-1}$$

b) On détermine les constantes en écrivant

$$\Omega(C_j, C_i) = 0 \quad \forall j=1,\ldots,i-1 \; ; \; n+1,\ldots,n+i-1$$

$$\Omega(C_j, \theta_i) = 0 \quad \forall j=1,\ldots,i-1 \; ; \; n+1,\ldots,n+i-1$$

c) On forme $q_i = \Omega(C_i, \theta_i)$ et on pose

$$\lambda_{n+i,n+i} = \frac{1}{q_i}$$

On a alors le vecteur

$$C_{n+i} = \lambda_{n+i,n+i} A._{n+i} + \lambda_{1,n+i} C_1 + \ldots + \lambda_{i-1,n+i} C_{i-1}$$
$$+ \lambda_{n+1,n+i} C_{n+1} + \ldots + \lambda_{n+i-1,n+i} C_{n+i-1}$$

(notations évidentes)

d) On en conclut que

$$A_i = (C_1, \ldots, C_i, A._{i+1}, \ldots, A._n, C_{n+1}, \ldots C_{n+i}, A._{n+i+1}, \ldots A._{2n})$$

avec

$$A_i = A_{i-1} \gamma_i$$

la matrice γ_i ayant la forme suivante :

$$\gamma_i = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \lambda_{1i} & 0 & \lambda_{1,n+i} \\
 & & \lambda_{i-1,i} & & \lambda_{i-1,n+i} \\
 & & 1 & & \\
 & & & 1 & \\
0 & & & & 0 \\
 & & & 1 & \\
 & & & & 1 \quad 0 \quad \lambda_{n+1,n+i} \\
 & & \lambda_{n+1,i} & 0 & \\
0 & & \lambda_{n+i-1,i} & & 1 \quad \lambda_{n+i,n+i} \\
 & & & & 1 \\
 & 0 & & 0 & \\
 & & & & 1
\end{pmatrix}$$

$n^{ième}$ ETAPE

Après avoir appliqué les n étapes de la symplectisation, nous avons obtenu une matrice

$$A_n = A\gamma_1 \ldots\ldots \gamma_n$$
$$= (C_1, \ldots, C_n, C_{n+1}, \ldots, C_{2n})$$

les C_i formant une base hyperbolique.

C - ETUDE DES MATRICES AINSI OBTENUES

C1 - Matrice $\gamma = \gamma_1 \ldots\ldots \gamma_n$

Toutes les matrices γ_i sont du type :

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}$$

avec R_1 triangulaire supérieure unipotente
R_2 triangulaire supérieure à diagonale nulle
R_3 triangulaire supérieure à diagonale nulle
R_4 triangulaire supérieure régulière

} (I)

On voit immédiatement que la matrice γ produit des n matrices γ_i est de la forme de ces γ_i, on a alors le résultat suivant.

LEMME : **Les matrices γ forment un groupe**

Ou plus précisément l'ensemble des matrices 2n x 2n à coefficients réels de la forme

$$\gamma = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}$$ où les R_i ont la signification de (I)

forment un groupe.

Il est évident que cet ensemble est multiplicativement stable et contient l'identité.

Démontrons que si γ appartient à l'ensemble précédent alors γ est inversible et son inverse appartient à l'ensemble.

Soit $\gamma = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}$ (les R_i ayant la signification de (I)) ;

cherchons alors

γ^{-1} sous la forme $\bar{\gamma}' = \begin{pmatrix} R_1' & R_2' \\ R_3' & R_4' \end{pmatrix}$ (s'il existe)

On doit avoir
$$\begin{cases} R_1R_1' + R_2R_3' = I & (1) \\ R_3R_2' + R_4R_4' = I & (2) \\ R_1R_2' + R_2R_4' = 0 & (3) \\ R_3R_1' + R_4R_3' = 0 & (4) \end{cases}$$

Compte tenu du fait que R_4 est régulière, (4) => $R_3' = -R_4^{-1} R_3 R_1'$ donc $R_1 R_1' - R_2 R_4^{-1} R_3 R_1' = I$ d'après (1), ce qui s'écrit $(R_1 - R_2R_4^{-1}R_3)R_1' = I$;

La matrice $R_1-R_2R_4^{-1}R_3$ est triangulaire supérieure unipotente donc R_1' sera triangulaire supérieure unipotente.

D'un autre côté $R_3' = -R_4^{-1}R_3R_1'$ est triangulaire supérieure à diagonale nulle.

On obtient de la même façon R_4' et R_2' du même type que R_4 et R_2. Ce qui montre que l'inverse existe pour γ, ce qui achève de prouver que l'ensemble considéré est un groupe.

———— X ————

NOTATION

Nous noterons

$$\Gamma = \left\{ A = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix} ; \quad A \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R}) \right. ;$$

R_1 triangulaire supérieure impotente
R_2 triangulaire supérieure à diagonale nulle
R_3 triangulaire supérieure à diagonale nulle
R_4 triangulaire supérieure régulière

Nous venons de prouver que Γ est un groupe.

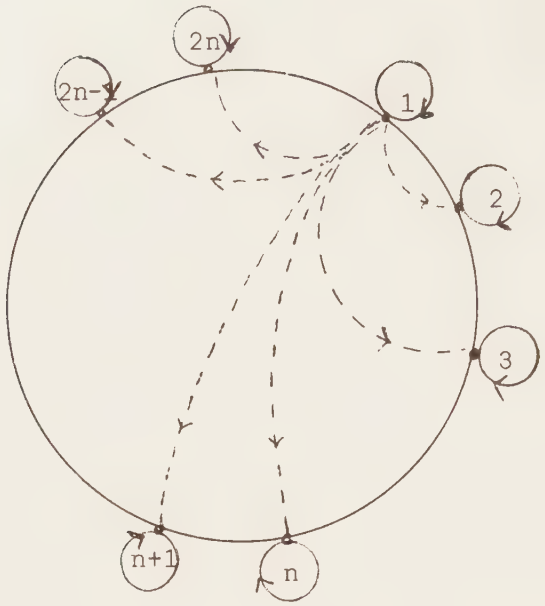
NATURE DU GROUPE Γ

Afin de faciliter la présentation du résultat, introduisons les termes : $a_{1,n+1} = a_{2,n+2} = \ldots = a_{n,2n} = 0$

Alors cette convention $\gamma \in \Gamma$ s'écrit :

$$\gamma = \begin{pmatrix}
1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} & \cdots & a_{12n} \\
 & 1 & & & & & \\
 & & \ddots & & & & \\
 & 0 & & a_{n-1,n} & 0 & & \\
 & & & & \ddots & & a_{n,2n} \\
 & & & 1 & & & \\
0 & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} & \cdots & a_{n+1,2n} \\
 & & & & & & \\
 & & & a_{2n-1,n} & 0 & & \\
 & & & & \ddots & & \\
0 & & & 0 & & & a_{2n,2n}
\end{pmatrix}$$

A cette matrice γ associons le graphe orienté plan (de manière habituelle)



C'est-à-dire : 1) On place dans le plan 2n points distincts 1, ... 2n

2) On fait la convention suivante :

.) si $a_{ij} \neq 0$ on trace un arc orienté de i vers j

.) si $a_{ij} = 0$ on ne trace rien.

(Pour plus de détails voir Gastinel [5] page 259 ou Varga [6]).

Nous remarquons alors que :

de (1) partent 2n arcs (non nuls à priori)
(2) partent 2n-2 arcs
⋮
(n) partent 2 arcs.

de (n+1) partent 2n-1 arcs
(n+2) partent 2n-3 arcs
⋮
(2n) partent 1 arc

donc si je réordonne ces points dans l'ordre suivant :

1,	n+1,	2,	n+2,	...,	i,	n+i,...,	n,	2n
↓	↓	↓	↓		↓	↓	↓	↓
1'	2'	3'	4'		(2i-1)'	(2i)'	(2n-1)'	(2n)'

Le nombre d'arcs partant de chaque point va en décroissant d'une unité chaque fois, ce qui est équivalent à dire que la matrice associée à ce graphe renuméroté est triangulaire supérieure.

Or, ce procédé de numérotage est équivalent à transmuer la matrice γ considérée par une matrice de permutation P (définie par $P_{2j,n+j} = 1$ et $P_{2i+1,i+1} = 1$ (j=1,n et i=0,n-1), les autres termes étant évidemment nuls. Comme la diagonale D de γ devient $P\ D\ P^t$, elle reste également invariante donc $P\ \gamma\ P^t$ est une matrice triangulaire supérieure régulière ayant sur la diagonale les anciennes valeurs diagonales dans un ordre différent.

Donc

THEOREME

> Les matrices γ précédemment décrites forment un groupe Γ tel qu'il existe une matrice de permutation P vérifiant
>
> $$P\ \Gamma\ P^t \subset T^+(2n,\mathbb{R})$$

Il est aussi important pour la suite de remarquer que le groupe Γ dépend de

$$4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + n = 2n^2-n \text{ paramètres.}$$

C2 - Matrice A_n

Nous savons que $A_n = (C_1, C_2, \ldots, C_{2n})$; et d'après la construction même de l'algorithme, nous avons :

.) $(i \leq n)$ $\quad C_i^t\ J\ C_j = \Omega(C_i,C_j) = \begin{cases} 0 & \forall j \neq n+i \\ 1 & j=n+i \end{cases}$

.) $(i > n)$ $\quad C_i^t\ J\ C_j = \Omega(C_i,C_j) = \begin{cases} 0 & \forall j \neq i-n \\ -1 & j = i-n \end{cases}$

Il est alors immédiat que :

$$A_n^t \, J \, A_n = J \text{ ce qui prouve le}$$

THEOREME

> La matrice A_n obtenue par application de l'algorithme est une matrice symplectique.

D - POSITION DU GROUPE Γ ET DU GROUPE SYMPLECTIQUE

LEMME

> $\Gamma \cap Sp(2n,\mathbb{R}) = \{I_{2n}\}$

Soit γ appartenant à $\Gamma \cap Sp(2n,\mathbb{R})$: γ doit donc vérifier

a) $\gamma^t \, J \, \gamma = J$

b) $\gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \Gamma_3 & \Gamma_4 \end{pmatrix}$ avec les notations

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{1n} \\ & & \\ 0 & & a_{n-1,n} \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,n+2} & a_{12n} \\ & & \\ 0 & & a_{n-1,2n} \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & a_{n+1,2} & a_{n+1,n} \\ & & \\ 0 & & a_{2n-1,n} \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad \Gamma_4 = \begin{pmatrix} a_{n+1,n+1} & \cdots & a_{n+1,2n} \\ & & \vdots \\ 0 & & a_{2n,2n} \end{pmatrix}$$

On vérifie que γ est symplectique si et seulement si

$$1)\quad \Gamma_1^t \Gamma_3 = \Gamma_3^t \Gamma_1$$

$$2)\quad \Gamma_2^t \Gamma_4 = \Gamma_4^t \Gamma_2$$

$$3)\quad \Gamma_1^t \Gamma_4 - \Gamma_3^t \Gamma_2 = I_n$$

Or, si nous formons

$$\Gamma_3^t \Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{n+1,2} & \\ & \Gamma'^t_3 \\ a_{n+1,n} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{1n} \\ 0 & & \\ & \Gamma'_1 & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{n+1,2} & & \\ & X & \\ a_{n+1,n} & & \end{pmatrix}$$

l'équation 1) précédente demande que $\Gamma_3^t \Gamma_1 = \Gamma_1^t \Gamma_3$ donc que la matrice $\Gamma_3^t \Gamma_1$ soit symétrique donc $a_{n+1,2} = \ldots = a_{n+1,n} = 0$ dans ce cas

$$\Gamma_3^t \Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ & \Gamma'^t_3 \Gamma'_1 & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Nous sommes ramenés à une matrice n-1 × n-1 ; ${}^{t}\Gamma'_3\,\Gamma'_1$ de même type que ${}^{t}\Gamma_3\,\Gamma_1$ donc on en déduit ${}^{t}\Gamma_3 = 0$, de la même façon 2) montrerait que $\Gamma_2 = 0$.

Finalement, il nous reste ${}^{t}\Gamma_1\,\Gamma_4 = I_n$ or ${}^{t}\Gamma_1$ est triangulaire inférieure unipotente et Γ_4 triangulaire supérieure d'après l'unicité de la décomposition de Gauss, on en déduit $\Gamma_1 = \Gamma_4 = I_n$.

Ce qui prouve que la seule matrice de l'intersection est la matrice identité.

X

D'autre part, nous remarquons que

① $Sp(2n,\mathbb{R})$ dépend continuement de $n_1 = 2n^2+n$ paramètres réels.

② Γ dépend continuement de $n_2 = 2n^2-n$ paramètres

donc $n_1 + n_2 = 4\,n^2$ paramètres donc

THEOREME

> $Sp(2n,\mathbb{R})$ et Γ sont deux sous groupes de $G\ell(2n,\mathbb{R})$ en bonne position.

Nous pouvons déduire de ce théorème le corollaire important suivant.

COROLLAIRE

> Si la décomposition d'une matrice par l'algorithme symplectique existe, alors elle est unique.

En effet, soient $A = S_1 \gamma_1^{-1}$

$= S_2 \gamma_2^{-1}$ deux décompositions d'une même matrice A par l'algorithme symplectique ($S_1, S_2 \in Sp(2n,\mathbb{R})$; $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$).

Nous pouvons écrire $S_2^{-1} S_1 = \gamma_2^{-1} \gamma_1$ compte tenu de la structure de groupe de $Sp(2n,\mathbb{R})$ et de Γ, on en déduit

$S_2^{-1} S_1 \in Sp(2n,\mathbb{R})$ et $\gamma_2^{-1} \gamma_1 \in \Gamma$.

Or, le lemme précédemment démontré prouve que $Sp(2n,\mathbb{R}) \cap \Gamma = \{I_{2n}\}$ donc

$$\left.\begin{array}{l} S_2^{-1} S_1 = I_{xn} \\ \gamma_2^{-1} \gamma_1 = I_{2n} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} S_1 = S_2 \\ \gamma_2 = \gamma_1 \end{array}$$

d'où l'unicité de la décomposition.

———/

E - DECOMPOSITION SYMPLECTIQUE DU GROUPE LINEAIRE

L'algorithme décrit dans la partie A nous permet d'énoncer

THEOREME (de la décomposition Symplectique)

$$\boxed{Gl(2n,\mathbb{R}) = \overline{Sp(2n,\mathbb{R}) \cdot \Gamma}}$$

En effet, nous avons démontré que pour presque toutes les matrices régulières (sauf sur un ensemble de mesure nulle), il était possible de déterminer $\gamma \in \Gamma$ telle que $A\gamma = S$, avec $S \in Sp(2n,\mathbb{R})$.

Comme γ est inversible, on peut donc énoncer le théorème.

D'autre part, compte tenu du théorème de la partie C, il existe une matrice de permutation P telle que $P\ \Gamma\ P^t \subset T^+(2n,\mathbb{R})$, notons

$$\hat{\Gamma} = P\ \Gamma\ P^t$$

Alors, le théorème précédent montre que si l'on applique l'algorithme symplectique à la matrice $P^t\ A\ P$, celle-ci peut s'écrire presque toujours

$$P^t\ A\ P = S\ \gamma$$

donc $A = P\ S\ P^t\ P\ \gamma\ P^t$ or $\hat{\gamma} = P\ \gamma\ P^t \in \hat{\Gamma}$ et est donc triangulaire supérieure

On peut donc énoncer

THEOREME

Si P est la matrice de permutation mise en évidence dans la partie C

Si $\widehat{Sp(2n,\mathbb{R})} = P(Sp(2n,\mathbb{R}))P^t$

Si $\hat{\Gamma} = P\ \Gamma\ P^t$ (sous groupe de $T^+(2n,\mathbb{R})$)

alors

$$Gl(2n,\mathbb{R}) = \widehat{Sp(2n,\mathbb{R})} \cdot \hat{\Gamma}$$

§4) LE DECOMPOSITION SYMPLECTIQUE NORMALISEE

Nous allons donner une modification de l'algorithme de Symplectisation qui sera très importante dans les applications aux recherches de valeurs propres.

A - DESCRIPTION DE L'ALGORITHME

Soit A une matrice régulière de taille 2n.

PREMIERE ETAPE :

1) On pose $C_1 = \lambda_{11} A._1$ et l'on détermine λ_{11} en imposant la condition

$$e^t C_1 = 1$$

(e désignant le vecteur de $\mathbb{R}^{2n}$ dont les composantes sont 1).

Cette condition se traduit par $\lambda_{11} = \dfrac{1}{e^t A._1}$

(Il est évident que $e^t A._1$ peut être nul, mais c'est une condition algébrique qui numériquement ne sera "jamais" vérifiée).

2) On pose $C_{n+1} = \lambda_{n+1,n+1} A._{n+1} + \lambda_{1,n+1} C_1$; on détermine les deux constantes en imposant

.) $\Omega(C_1, C_{n+1}) = 1$ donc $\lambda_{n+1,n+1}\, \Omega(C_1, A._{n+1}) = 1$

.) $e^t C_{n+1} = \lambda_{n+1,n+1}\, e^t A._{n+1} + \lambda_{1,n+1} = 1$

Ces deux conditions déterminent $\lambda_{n+1,n+1}$ et $\lambda_{1,n+1}$ en général (même remarque que précédemment).

Nous avons alors l'écriture matricielle suivante :

$$A_1 = A\, \gamma_1$$

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & & \\ & I_{n-1} & 0_n \\ & & \\ 0_n & & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & \lambda_{1,n+1} \; 0 \; 0 & \\ I_n & 0 & \\ & \lambda_{n+1,n+1} & \\ 0_n & & I_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_{11} & & \lambda_{11}.\lambda_{1,n+1} \\ & I_{n-1} & 0 \\ & & \lambda_{n+1,n+1} \\ 0_n & & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

et $A_1 = (C_1, A._2, \ldots, A._n, C_{n+1}, A._{n+2}, \ldots A._{2n})$.

Décrivons alors pour plus de clarté la deuxième étape.

DEUXIEME ETAPE :

.) On pose

$$C_2 = \lambda_{22} A._2 + \lambda_{12} C_1 + \lambda_{n+1,2} C_{n+1}$$

et on impose les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \Omega(C_1,C_2) = \lambda_{22}\, \Omega(C_1,A._2) + \lambda_{n+1,2} = 0 \\ \Omega(C_2,C_{n+1}) = \lambda_{22}\, \Omega(A._2,C_{n+1}) + \lambda_{12} = 0 \\ e^t C_2 = \lambda_{22}\, e^t A._2 + \lambda_{12} + \lambda_{n+1,2} = 1. \end{cases}$$

Ces 3 conditions déterminent (sauf sur un ensemble de mesure nulle) les 3 constantes λ_{22}, λ_{12}, $\lambda_{n+1,2}$.

On écrit alors $A_2' = A_1 \gamma_2^{(1)}$

avec $\gamma_2^{(1)} =$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda_{12} & 0 & \\ & \lambda_{22} & 0 & \\ & 1 & & 0_n \\ & \ddots & & \\ & 0 & 1 & \\ \hline & 0 \;\; \lambda_{n+1,2} & 0 & \\ & & & \\ & & & I_n \\ & 0 & & \end{array}\right)$$

.) On forme ensuite

$$C_{n+2} = \lambda_{n+2,n+2} A._{n+2} + \lambda_{1,n+2} C_1 + \lambda_{n+1,n+2} C_{n+1} + \lambda_{2,n+2} C_2$$

On impose

$$\Omega(C_2, C_{n+2}) = 1 \Rightarrow \lambda_{n+2,n+2}\, \Omega(C_2, A._{n+2}) = 1$$

ce qui permet de déterminer $\lambda_{n+2,n+2}$

$$\begin{cases} \Omega(C_1, C_{n+2}) = 0 \Rightarrow \lambda_{n+2,n+2}\, \Omega(C_1, A._{n+2}) + \lambda_{n+1,n+2} = 0 \\ \Omega(C_{n+1}, C_{n+2}) = 0 \Rightarrow \lambda_{n+2,n+2}\, \Omega(C_{n+1}, A._{n+2}) - \lambda_{1,n+2} = 0 \end{cases}$$

Ces deux conditions déterminant $\lambda_{n+1,n+2}$; $\lambda_{1,n+2}$.

Enfin, on impose $e^t\, C_{n+2} = 1$, ce qui se traduit par

$$\lambda_{n+2,n+2}\, e^t\, A._{n+2} + \lambda_{1,n+2} + \lambda_{n+1,n+2} + \lambda_{2,n+2} = 1$$

ce qui détermine $\lambda_{2,n+2}$.

On écrit matriciellement :

$$A_2 = A_2'\, \gamma_2^{(2)} \quad \text{avec}$$

$$\gamma_2^{(2)} = \left(\begin{array}{c|cccc} & 0 & \lambda_{1,n+2} & 0 & 0 \\ & 0 & \lambda_{2,n+2} & 0 & 0 \\ I_n & & 0 & & \\ \hline & 1 & \lambda_{n+1,n+2} & 0 & \\ & 0 & \lambda_{n+2,n+2} & 0 & \\ 0_n & 0 & & I_{n-2} & \end{array}\right)$$

On a alors

$$A_2 = (C_1, C_2, A._3, \ldots, A._n, C_{n+1}, C_{n+2}, A._{n+3} \ldots A._{2n}).$$

$$= A_1\, \gamma_2$$

avec

$$\gamma_2 = \gamma_2^{(1)}\ \gamma_2^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & \lambda_{12} & 0 & 0 & \gamma_{1,n+2} \\ & \lambda_{22} & 0 & & \gamma_{2,n+2} \\ & & 1 & & \\ & 0 & & & 0 \\ & & & 1 & \\ \hline 0 & \lambda_{n+1,2} & 0 & 1 & \gamma_{n+1,n+2} \\ & & & & \lambda_{n+2,n+2} \\ & & & & 1 \\ & 0 & & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(nous avons introduit la notation γ_{ij} à certains endroits pour signaler que ces termes étaient modifiés dans le produit $\gamma_2^{(1)}\ \gamma_2^{(2)}$).

Si l'on forme alors $\gamma_1.\gamma_2$ on obtient une matrice du type suivant :

$$\gamma_1\,\gamma_2 = \left(\begin{array}{ccc|cc} \lambda_{11} & \gamma_{12} & & \gamma_{1,n+1} & \gamma_{1,n+2} \\ & \lambda_{22} & & 0 & \gamma_{2,n+2} \\ & & 1 & & \\ 0 & & & 0 & \\ & & & 1 & \\ \hline 0 & \gamma_{n+1,2} & 0 & \lambda_{n+1,n+1} & \lambda_{n+1,n+2} \\ & & & & \lambda_{n+2,n+2} \\ & & & & 1 \\ 0 & & & 0 & \end{array}\right)$$

$i^{ème}$ ETAPE :

Supposons être arrivé à l'étape i avec une matrice

$$A_{i-1} = A\,\gamma_1 \cdots \gamma_{i-1}$$

$$= (C_1,\ldots,C_{i-1},A_{\cdot i},\ldots,A_{\cdot n},C_{n+1},\ldots C_{n+i-1},A_{\cdot n+i},\ldots A_{\cdot 2n})$$

Les colonnes C_i étant normalisées par $e^t C_i = 1$ et formant un ensemble de i-1 plans hyperboliques $H_j = \{C_j, C_{j+n}\}$ $j=1,\ldots,i-1$.

Enfin

$$\gamma_1 \cdots \gamma_{i-1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1,i-1} & \gamma_{1,n+1} & \cdots & \gamma_{1,n+i-1} & \\ & \lambda_{22} & & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & \lambda_{i-1,i-1} & & & \gamma_{i-1,n+i-1} & \\ & 0 & & 1 & & & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & 1 & & & & \\ \hline 0 & \gamma_{n+1,2} & \cdots & \gamma_{n+1,i-1} & \lambda_{n+1,n+1} & \gamma_{n+1,n+i-1} & & 0 \\ & & & & & & & \\ & & \gamma_{n+i-2,i-1} & & & & \lambda_{n+i-1,n+i-1} & \\ & 0 & & 0 & 0 & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{array}\right)$$

Pour former A_i, nous opérons en deux étapes

.) Formation de C_i

On pose

$$C_i = \lambda_{ii}\, A_{\cdot i} + \lambda_{1i}\, C_1 + \ldots + \lambda_{i-1,i}\, C_{i-1}$$

$$+ \lambda_{n+1,i}\, C_{n+1} + \ldots + \lambda_{n+i-1,i}\, C_{n+i-1}$$

On impose alors les 3 types de conditions :

$$\text{i-1 conditions}\begin{cases}\Omega(C_1,C_i) = \lambda_{ii}\,\Omega(C_1,A_{\cdot i}) + \lambda_{n+1,i}\,\underbrace{\Omega(C_1,C_{n+1})}_{=1} = 0\\ \vdots\\ \Omega(C_{i-1},C_i) = \lambda_{ii}\,\Omega(C_{i-1},A_{\cdot i}) + \lambda_{n+i-1,i}\,\underbrace{\Omega(C_{i-1},C_{n+i-1})}_{=1} = 0\end{cases}$$

puis

$$\text{i-1 conditions}\begin{cases}\Omega(C_i,C_{n+1}) = \lambda_{ii}\,\Omega(A_{\cdot i},C_{n+1}) + \lambda_{1i}\,\underbrace{\Omega(C_1,C_{n+1})}_{=1} = 0\\ \vdots\\ \Omega(C_i,C_{n+i-1}) = \lambda_{ii}\,\Omega(A_{\cdot i},C_{n+i-1}) + \lambda_{i-1,i}\,\underbrace{\Omega(C_{i-1},C_{n+i-1})}_{=1} = 0\end{cases}$$

enfin

$$e^t C_i = (\lambda_{ii}\, e^t A_{\cdot i} + \lambda_{1i} + \ldots + \lambda_{i-1,i} + \lambda_{n+1,i} + \ldots + \lambda_{n+i-1,i}) = 1$$

Ces 2i-1 conditions permettent de déterminer (sauf sur un ensemble de mesure nulle) les constantes intervenant dans l'expression de C_i.

On écrit encore cela matriciellement sous la forme :

$$A_i' = A_{i-1}\,\gamma_i^{(1)}$$

$$= (C_1,\ldots,C_i,A_{\cdot i+1},\ldots A_{\cdot n},C_{n+1},\ldots C_{n+i-1},A_{\cdot n+i},A_{\cdot 2n})$$

avec

$$\gamma_i^{(1)} = \begin{pmatrix}
1 & & 0 & \lambda_{1i} & & & \\
 & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & & & O_n \\
 & & & \lambda_{ii} & & & \\
 & & & 1 & & & \\
 & 0 & & & & & \\
 & & & & 1 & & \\
0 & & & \lambda_{n+1,i} & & & \\
 & & 0 & \lambda_{n+i-1,i} & & & \\
 & & & 0 & & & I_n \\
 & 0 & & & & & \\
 & & & & 0 & &
\end{pmatrix}$$

.) <u>Formation de C_{n+i}</u>

On pose

$$C_{n+i} = \lambda_{n+i,n+i}\, A._{n+i} + \lambda_{1,n+i}\, C_1 + \dots + \lambda_{i-1,n+i}\, C_{i-1} + \underline{\underline{\lambda_{i,n+i}\, C_i}}$$

$$+ \lambda_{n+1,n+i}\, C_{n+1} + \dots + \lambda_{n+i-1,n+i}\, C_{n+i-1}$$

On impose les 4 types de conditions :

i-1 conditions

$$\left\{\begin{array}{l}
\Omega(C_1, C_{n+i}) = \lambda_{n+i,n+i}\, \Omega(C_i, A._{n+i}) + \lambda_{n+1,n+i} = 0 \\
\vdots \\
\Omega(C_{i-1}, C_{n+i}) = \lambda_{n+i,n+i}\, \Omega(C_{i-1}, A._{n+i}) + \lambda_{n+i-1,n+i} = 0
\end{array}\right.$$

puis

i-1 conditions

$$\left\{\begin{array}{l}
\Omega(C_{n+i}, C_{n+1}) = \lambda_{n+i,n+i}\, \Omega(A._{n+i}, C_{n+1}) + \lambda_{1,n+i} = 0 \\
\vdots \\
\Omega(C_{n+i}, C_{n+i-1}) = \lambda_{n+i,n+i}\, \Omega(A._{n+i}, C_{n+i-1}) + \lambda_{i-1,n+i} = 0
\end{array}\right.$$

enfin les deux conditions

$$\begin{cases} \Omega(C_i, C_{n+i}) = \lambda_{n+i,n+i}\ \Omega(C_i, A._{n+i}) = 1 \\ e^t\ C_{n+i} = 1 \end{cases}$$

Ces 2i conditions déterminent évidemment les constantes λ_{ij} intervenant dans C_{n+i}

et l'on a :

$$A_i = A_i'\ \gamma_i^{(2)} \qquad \text{avec}$$

$$\gamma_i^{(2)} = \begin{pmatrix} & & & & \lambda_{1,n+i} & \\ & I_n & & 0 & & \\ & & & & \lambda_{i,n+i} & \\ & & 1 & & \lambda_{n+1,n+i} & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \lambda_{n+i,n+i} & \\ & 0_n & & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc} \qquad A_i = A_{i-1}\ \gamma_i = A\ \gamma_1 \cdots \gamma_i$$

$$= (C_1, \ldots, C_i, A._{i+1}, \ldots, A._n, C_{n+1}, \ldots C_{n+i}, A._{n+i+1} \cdots A._{2n})$$

et l'on vérifie que

$$\gamma_1 \cdots \gamma_i = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \gamma_{1i} & \gamma_{1,n+1} & \gamma_{1,n+i} \\ & \lambda_{ii} & & \gamma_{i,n+i} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & \gamma_{n+1,2} \cdots \gamma_{n+1,i} & \lambda_{n+1,n+1} & \gamma_{n+1,n+i} \\ & \gamma_{n+i-1,i} & & \lambda_{n+i,n+i} \\ & & & 1 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le raisonnement se poursuit alors par récurrence et à la $n^{ième}$ étape nous obtenons

$$A_n = A\,\gamma_1 \cdots\cdots \gamma_n$$
$$= (C_1, \ldots, C_n, C_{n+1}, \ldots C_{2n})$$

avec

1) $$\gamma_1 \cdots \gamma_n = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ & \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}$$

.) R_1 et R_4 appartenant à $T^+(n, \mathbb{R})$

.) R_2 triangulaire supérieure quelconque

.) R_3 étant triangulaire supérieure à diagonale nulle.

2) Les colonnes C_i de la matrice A_n formant n plans hyperboliques

$H_j = \{C_j, C_{n+j}\}$ $(j=1,\dots n)$

Ce qui, d'après un raisonnement du paragraphe précédent, montre que A_n est symplectique.

On peut donc énoncer le théorème :

THEOREME

Soit $A \in Gl(2n,\mathbb{R})$.

Si la méthode de symplectisation est constructible pour A, alors il existe deux matrices γ et S telles que

$$A\gamma = S$$

avec

.) $\gamma = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}$

.) R_1 et R_4 appartenant à $T^+(n,\mathbb{R})$

.) R_2 triangulaire supérieure quelconque

.) R_3 triangulaire supérieure de diagonale nulle.

.) S matrice symplectique normalisée.

COROLLAIRE 1

Les matrices γ intervenant dans la décomposition précédente forment un groupe $\Gamma^{\ast}$

De plus, il existe une matrice de permutation P telle que

$$P\,\Gamma^{\ast}\,P^t = T^+(2n,\mathbb{R})$$

Ce corollaire se démontre exactement comme il est fait pour l'algorithme symplectique normal.

Nous noterons dans ce qui suit

$$\boxed{NSp(2n,\mathbb{R}) = \{A \in Sp(2n,\mathbb{R}) \ ; \ e^t A = e^t\}}$$

C'est évidemment un sous groupe du groupe symplectique que nous appellerons groupe symplectique normalisé.

B - POSITION DE Γ^* ET DE $NSp(2n,\mathbb{R})$

LEMME

$$\boxed{\Gamma^* \cap NSp(2n,\mathbb{R}) = \{I_{2n}\}}$$

Soit $\gamma = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}$ appartenant à l'intersection de deux groupes ;

dire que γ est symplectique revient à écrire

$$\begin{cases} R_1^t R_3 = R_3^t R_1 & 1) \\ R_2^t R_4 = R_4^t R_2 & 2) \\ R_1^t R_4 - R_3^t R_2 = I_n & 3) \end{cases}$$

Or, R_3 est triangulaire supérieure stricte et R_1 triangulaire supérieure ; un raisonnement déjà fait au paragraphe précédent montre que la seule possibilité de vérifier 1) est $R_3 = 0$, 3) montre alors que $R_1 = D$ (diagonale) et $R_4 = D^{-1}$ (unicité de la décomposition LR).

La condition de normalisation $e^t\gamma = e^t$ montre que l'on doit avoir $D = I$.

En portant ce résultat dans 2), on a alors $R_2^t = R_2$ donc la seule possibilité est $R_2 = d$ (diagonale).

La condition $e^t\gamma = e^t$ montre alors que $d = 0$, donc $\gamma = I_{2n}$.

Si maintenant nous remarquons que :

1) le nombre de paramètres libres de $\Gamma^{\ast\ast}$ est

$$n_1 = 3\,\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = 2n^2 + n$$

2) le nombre de paramètres libres de $NSp(2n,\mathbb{R})$ est

$$n_2 = (2n^2+n) - 2n = 2n^2-n$$

On en déduit

THEOREME

Les groupes $\Gamma^{\ast\ast}$ et $NSp(2n,\mathbb{R})$ sont en bonne position.

C - DECOMPOSITION SYMPLECTIQUE NORMALISEE DU GROUPE LINEAIRE

Si nous considérons le groupe $P\,\Gamma^{\ast\ast}\,P^t = \widehat{\Gamma^{\ast\ast}}$ (voir corollaire 1), il est évident que toute matrice A peut se décomposer (en appliquant l'algorithme à $P\,A\,P^t$) en produit d'une matrice appartenant à $P.NSp(2n,\mathbb{R})\,P^t$ et d'une matrice triangulaire supérieure.

Comme les conditions de non décomposition sont du type "fermé", nous avons

THEOREME

$$G\ell(2n,\mathbb{R}) = \overline{(P.NSp(2n,\mathbb{R}).P^t).T^+(2n,\mathbb{R})}$$

§5) L'ELIMINATION SYMPLECTIQUE

Le procédé de symplectisation décrit dans les paragraphes précédents, correspond comme nous l'avons indiqué à l'orthogonalisation de Schmidt-Hilbert.

Comme nous l'avons remarqué au paragraphe sur l'orthogonalisation, le procédé d'Hilbert-Schmidt n'est pas le seul possible et on considère aussi les procédés de type élimination-générateurs.

La connaissance de générateurs du groupe orthogonal nous donne une méthode de décomposition, il est évidemment intéressant de voir si la même démarche peut être appliquée dans le cas du groupe symplectique.

Nous allons voir qu'il en est bien ainsi :

A - RAPPELS DES RESULTATS DE DICKSON

Dans un article datant de 1901, [1], Dickson prouve (entre autres résultats capitaux) le théorème suivant :

THEOREME

> $Sp(2n,\mathbb{R})$ est engendré par les matrices (que nous appellerons élémentaires) suivantes
>
> $$I_{2n} + t(E_{i+n,j+n} - E_{ji})$$
> $$I_{2n} + t(E_{i+n,j} - E_{j+n,i})$$
> $$I_{2n} + t(E_{i+n,i})$$
>
> et leurs transposées ($t \in \mathbb{R}$)

(Nous ne reviendrons pas sur cette décomposition ; nous renvoyons pour cela soit à l'article de Dickson, soit à la présentation "plus moderne" de Ree [2]).

Nous allons utiliser ce résultat pour proposer un procédé d'élimination :

DEFINITION

Nous dirons que

$I_{2n} + t(E_{i+n,j+n} - E_{ji})$ est une matrice de classe A

$I_{2n} + t(E_{i+n,j} - E_{j+n,i})$ est une matrice de classe B

$I_{2n} + t\,E_{i+n,i}$ est une matrice de classe C

B - DESCRIPTION DU PROCEDE D'ELIMINATION

Il faut tout d'abord remarquer que nous allons chercher à éliminer les éléments d'une matrice A de manière à obtenir une matrice appartenant au groupe Γ que nous avons mis en évidence au §3).

Soit A une matrice régulière de taille 2n, réelle : $A=(a_{ij})$.

PREMIERE ETAPE

Cette étape va consister à éliminer les éléments

$a_{2,1}$; ... ; $a_{n,1}$; $a_{n+1,1}$; $a_{2n,1}$

Posons $S_1 = I_{2n}$ et $A_1 = A$

a) Soit S_2 une matrice élémentaire de classe A définie par

$S_2 = I_{2n} + \frac{a_{21}}{a_{11}} (E_{n+1,n+2} - E_{21})$ alors si nous formons $S_2 A_1$ alors (en désignant comme d'habitude par $A_{j.}$ la $j^{ième}$ ligne de A), nous obtenons

$$A_2 = \left| \begin{array}{l} A_{1.}^{(1)} \\ A_{2.}^{(1)} - \frac{a_{21}}{a_{11}} A_{1.}^{(1)} \\ \vdots \\ A_{n.}^{(1)} \\ A_{n+1.}^{(1)} + \frac{a_{21}}{a_{11}} A_{n+2.}^{(1)} \\ A_{n+2.}^{(1)} \\ A_{2n.}^{(1)} \end{array} \right.$$

ce qui évidemment élimine a_{21}.

b) Eliminons $a_{j1}^{(j)}$ élément de $A_{j-1} = (a_{ij}^{(j)})$, matrice de la forme

$$A_{j-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1\,2n} \\ 0 & a_{22}^{(j)} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & & & \\ a_{j1}^{(j)} & a_{j2}^{(j)} & & \\ a_{n1}^{(j)} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{2n1}^{(j)} & a_{2n2}^{(j)} & & a_{2n\,2n}^{(j)} \end{pmatrix}$$

Nous utilisons encore S_j matrice de classe A donnée par

$$S_j = I_{2n} + \frac{a_{j1}^{(j)}}{a_{11}} (E_{n+1,n+j} - E_{j1})$$

et il est immédiat que

$$S_j A_{j-1} = \begin{vmatrix} A_{1.}^{(j-1)} & & & \\ \vdots & & & \\ A_{j-1.}^{(j-1)} & & & \\ A_{j.}^{(j-1)} - \frac{a_{j1}^{(j)}}{a_{11}} A_{1.}^{(j)} & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ A_{n+1}^{(j-1)} + \frac{a_{j1}^{(j)}}{a_{11}} A_{n+j.}^{(j)} & & & \\ A_{2n.}^{(j-1)} & & & \end{vmatrix} \quad \ldots A_{j+1}$$

et telle que $a_{j1}^{(j+1)} = 0$, les zéros précédents étant bien sur conservés.

c) Supposons (par utilisation de matrices de la classe A) avoir éliminé $a_{21}, \ldots\ldots, a_{nj}^{(n)}$

Nous avons alors

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1\,2n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ldots\ldots & a_{2,2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & & & \\ a_{n+1,1}^{(n)} & a_{n+1,2}^{(n)} & & \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ a_{2n}^{(n)} & a_{2n,2}^{(n)} & & a_{2n,2n}^{(n)} \end{pmatrix}$$

C'est ici un changement de stratégie et pour cette étape, il faut utiliser une matrice de classe C.

Soit $S_{n+1} = I - \frac{a^{(n)}_{n+1,1}}{a_{11}} E_{n+1,1}$

Il est immédiat que $S_{n+1} A_n = A_{n+1}$ aura un zéro en $a^{(n+1)}_{n+1,1}$.

d) Plaçons-nous à l'élimination de $a^{(j+n)}_{j+n,1}$

Nous avons la matrice

$$A_{j+n-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,2n} \\ 0 & a^{(2)}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & & & \\ a^{(j+n)}_{j+n,1} & a^{(j+n)}_{j+n,2} & & \\ a^{(j+n)}_{2n,1} & a^{(j+n)}_{2n,2} & & a_{2n,2n} \end{pmatrix}$$

Nous allons utiliser S_{j+n} matrice de classe B, définie par :

$$S_{j+n} = I_{2n} + \frac{a^{(j+n)}_{j+n,1}}{a_{11}} (E_{n+1,j} - E_{j+n,1})$$

On voit que $S_{j+n} A_{j+n-1} = A_{j+n}$ conserve les zéros que nous avons précédemment construits et ajoute $a^{(j+n+1)}_{j+n,1} = 0$.

e) Nous achevons par des transformations de classe B l'élimination dans la première colonne et nous obtenons finalement :

$$A_{2n} = S_{2n} \cdots S_1 A$$

ayant la forme suivante :

$$A_{2n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{2n2} & & a_{2n2n} \end{pmatrix}$$

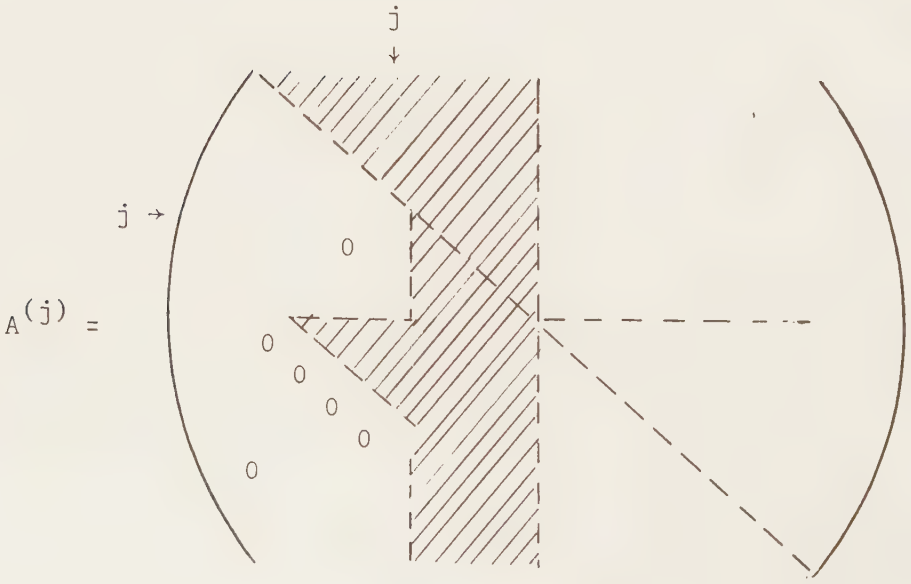
Notons $S^{(1)} = S_{2n} \ldots S_1$ (matrice $\in Sp(2n,\mathbb{R})$)

$A^{(1)} = A_{2n}$.

Nous avons donc $A^{(1)} = S^{(1)} A$

$j^{ième}$ ETAPE ($j \leq n$)

Nous supposerons avoir obtenu une matrice $A^{(j)}$ ayant la forme suivante :



Nous allons éliminer les éléments $a^{(j)}_{j+1,j}$, ..., $a^{(j)}_{n,j}$; puis $a^{(j)}_{n+j,j}$ jusqu'à $a^{(j)}_{2n,j}$.

a) Elimination de $a^{(j)}_{j+1,j}$

Nous utilisons une matrice élémentaire de classe A, qui a la forme

$$S_1' = I_{2n} + \frac{a^{(j)}_{j+1,j}}{a^{(j)}_{jj}} (E_{j+n,j+n+1} - E_{j+1,j})$$

Cette matrice permet d'éliminer $a^{(j)}_{j+1,j}$ et d'autre part conserve les zéros préexistants.

Soit $A_1^{(j+1)} = S_1' A^{(j)}$

b) Elimination de $a^{(j+1)}_{j+k,j}$ $(1 \leq k \leq n-j)$

Nous voyons immédiatement que nous devons utiliser des matrices de classe A, comme dans la première étape.

c) Elimination de $a^{(j+1)}_{n+1,j}$

On utilise comme dans la première étape (partie c) une matrice de classe C de la forme

$$I_{2n} - \frac{a^{(j+1)}_{n+1,j}}{a^{(j)}_{jj}} E_{j+n,n}$$

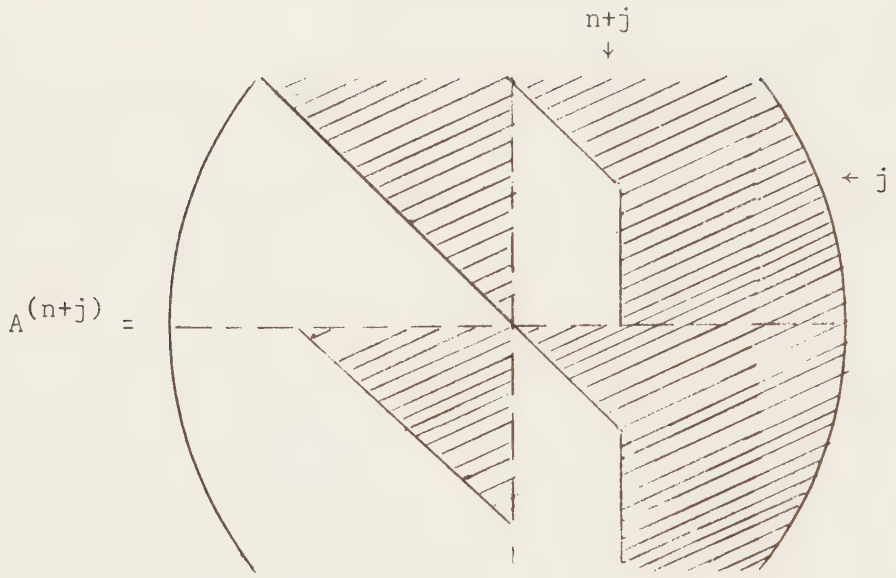
d) Elimination de $a^{(j+1)}_{n+k,j}$ $(k>j)$

Comme dans le cas de la première étape, il faut utiliser une matrice de classe B définie par

$$I + \frac{a^{(j+1)}_{n+k,j}}{a^{(j)}_{jj}} (E_{j+n,k} - E_{n+k,j})$$

ETAPE n+j

Nous avons



a) Pour éliminer $a_{j+1,n+j)}^{(n+j)}$, ..., $a_{n,n+j}^{(n+j)}$, on utilise des matrices du type B mais transposées, c'est-à-dire du type

$$I_{2n} + t(E_{i+n,j} - E_{j+n,i})^t$$

Par exemple, pour éliminer $a_{j+1,n+j}^{(n+j)}$ nous allons utiliser la matrice élémentaire

$$S = I_{2n} + t(E_{j,j+n+1} - E_{j+1,j+n})$$

qui est telle que $S\ A^{(n+j)}$ ait la forme

$$S\ A^{(n+j)} = \begin{vmatrix} A_{1.} \\ A_{j.} + t\ A._{j+n+1} \\ A_{j+1} - t\ A_{j+n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{2n.} \end{vmatrix}$$

si l'on choisit $t = \dfrac{a^{(n+j)}_{j+1,n+j}}{a^{(n+j)}_{n+j,n+j}}$ on élimine $a^{(n+j)}_{j+1,n+j}$

Le choix de cette stratégie est guidée par les paragraphes précédents, où nous avons marqué le rôle fondamental que jouaient les éléments diagonaux que nous proposons par analogie avec la méthode de Gauss, d'appeler pivots.

b) Pour éliminer $a^{(n+j)}_{j+n+1,j+n} \cdots , a^{(n+j)}_{2n,j+n}$

Il est naturel d'utiliser alors les matrices de la classe A transposées, du type $I+t(E_{j+n,i+n}-E_{ij})$ qui ne modifient pas les zéros préexistants mais qui, par un choix convenable de t, permettent d'éliminer les éléments considérés.

C - CONCLUSION

On voit finalement qu'il existe une matrice symplectique S produit de matrices symplectiques élémentaires telle que $S\,A = A^{(2n)}$ avec $A^{(2n)}$ appartenant à $\Gamma^{\times}$.

Nous retrouvons par là la conclusion des paragraphes précédents.

§6) CONTINUITE DE LA DECOMPOSITION SYMPLECTIQUE NORMALISEE

Nous noterons $\hat{S}$ les matrices appartenant à $\widehat{NSp(2n,\mathbb{R})}$ $=P.(NSp(2n,\mathbb{R}))\ P^t$.

Soit $A \in G\ell(2n,\mathbb{R})$; supposons la décomposable par l'algorithme symplectique normalisé en $A = \hat{S}.R$ ($\hat{S} \in \widehat{NSp(2n,\mathbb{R})}$; $R \in T^+(2n,\mathbb{R})$).

Soit a une petite perturbation de la matrice A alors

$$\begin{aligned} A' &= A + a \\ &= A(I+A^{-1}\ a) \\ &= \hat{S}(I+R\ A^{-1}\ a\ R^{-1})\ R \end{aligned}$$

Posons $C = R\ A^{-1}\ a\ R^{-1}$

Il est immédiat que si $\|\ \|$ est une norme sous multiplicative sur l'algèbre des matrices, on a :

$$\|C\| < \|R\|\ \ \|A^{-1}\|\ \ \|a\|\ \ \|R^{-1}\|$$

La quantité $k = \|R\|\ \ \|A^{-1}\|\ \ \|R^{-1}\|$ ne dépend que de A et de la norme $\|\ \|$

On a donc

$$\|C\| \leq k\ \|a\|$$

Si la perturbation $\|a\| \leq \frac{\varepsilon}{k}$ on voit que $\|C\| \leq \varepsilon$, donc on peut considérer C comme une perturbation de l'identité.

β.) Si l'on considère alors I+C avec C suffisamment petit, il est évident (par la construction même de l'algorithme symplectique) que l'on peut écrire $I+C = \hat{s}r$ (les vecteurs colonnes de la matrice I+C étant voisins de ceux de I, les divers produits $\Omega(C_i,\theta_{n+i})$ ne peuvent être nuls).

γ.) On a alors, compte tenu de l'unicité de la décomposition $\hat{S}\ R$:

$\hat{s}$ voisin de I et r voisin de I.

On posera $\|\hat{s} - I\| \leq \varepsilon_1$

δ.) Alors $A' = \bar{S}\ \hat{s}\ r\ R$ d'après β), mais comme l'ensemble des matrices décomposables par $\hat{S}\ R$ est ouvert si $\|a\|$ est assez petite alors $A' = \hat{S}'\ R'$.

On a donc :

$$\|\hat{S}' - \hat{S}\| = \|\hat{S}\ \hat{s} - \hat{S}\| \leq \|\hat{S}\|\ \|\hat{s} - I\|$$

Donc $\|\hat{S}' - \hat{S}\| \underset{\|a\|\to 0}{\to} 0$, ce qui assure la continuité de la décomposition.

Nous pouvons donc énoncer le théorème :

THEOREME

$\overbrace{NSp(2n,\mathbb{R})} = P.NSp(2n,\mathbb{R})\ P^t$ décompose continuement $G\ell(2n,\mathbb{R})$ suivant $T^+(2n,\mathbb{R})$.

§7) COUT DE L'ALGORITHME $\hat{S}\ R$

A) Cas non normalisé

Nous allons nous intéresser au nombre de multiplication et de division nécessaires à la formation de S (donc de $\hat{S}$).

.) Pour calculer le $i^{ème}$ plan hyperbolique H_i, nous devons

.) Pour calculer C_i faire 2(i-1) = 2i-2 produits "scalaires" de 2n multiplication

.) Pour calculer θ_i faire 2i-1 produits scalaires

.) Pour calculer q_i un produit scalaire de 2n multiplication

.) Pour calculer C_{n+i} 2n division.

Donc en tout à la $i^{ème}$ étape, il faut :

.) ((2i-2) + (2i-1) + 1) en multiplication

.) 2n division.

Comme nous devons faire n fois ce calcul, nous devons faire :

.) $2n \sum_{i=1}^{n} (4i-2)$ multiplication

.) $2n^2$ division.

Donc le calcul de S demande de l'ordre de $8\ n\ \frac{n(n+1)}{2} \simeq \underline{4n^3 \text{ multiplication et } 2n^2 \text{ division}}$.

B) Cas normalisé

Il est immédiat que l'ordre des multiplications et divisions est celui du symplectique non normalisé.

CHAPITRE IV

LES ALGORITHMES SEMI-SIMPLES

§1) LE Σ-ALGORITHME

Nous allons nous placer encore une fois dans le cadre des matrices $2n \times 2n$ nous pouvons les supposer à valeurs complexes ou réelles.

A) LE GROUPE Σ [1]

DEFINITION

Nous noterons

$$\Sigma = \{A = \left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline 0 & Y \end{array}\right) \; ; \; A \in {}^{n}/_{2n}(\mathbb{R}) \; ; \; X \text{ et } Y \in G\ell(n,\mathbb{R}) \; ; \; Ye = e \}$$

$$e^t = (1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^n .$$

LEMME 1 : Σ est un groupe

.) Σ est multiplicativemnet stable car le produit de diagonales par blocs est une matrice diagonale par bloc :

$$\text{Si } A = \left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline 0 & Y \end{array}\right) ; \qquad B = \left(\begin{array}{c|c} X' & 0 \\ \hline 0 & Y' \end{array}\right) \quad \text{avec A et B} \in$$

nous avons immédiatement :

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} XX' & 0 \\ \hline 0 & YY' \end{array}\right)$$

Il est évident que XX' et YY' appartiennent à $G\ell(n,\mathbb{R})$ et enfin $YY'e = Ye = e$.

Donc Σ est multiplicativement stable.

.) Si $A = \left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline 0 & Y \end{array}\right)$ appartient à Σ alors la matrice

$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} X^{-1} & 0 \\ \hline 0 & Y^{-1} \end{array}\right)$ appartient aussi à Σ

En effet, $Y^{-1}\, e = e$ car $Ye = e$ et Y inversible.

.) Finalement il est évident que I_{2n} appartient à Σ .

X

Il est d'autre part facile de voir que le nombre de paramètres du groupe Σ est :

$n^2 + (n^2-n) = 2n^2 - n$ paramètres.

Il faut remarquer que c'est la dimension complémentaire de la dimension du groupe des matrices triangulaires supérieures $2n \times 2n$.

Néanmoins, il y a une difficulté comme dans le cas du groupe symplectique :

Les groupes $T^+(2n,\mathbb{R})$ et Σ ne sont pas en bonne position.

En effet, si l'on considère l'intersection de ces deux groupes elle est naturellement formée des matrices du type :

$$\left(\begin{array}{c|c} R_1 & \\ \hline & R_2 \end{array}\right)$$

Avec R_1 et $R_2 \in T^+(n,\mathbb{R})$ et $R_2 e = e$.

Donc cette intersection dépend de $n(\frac{n+1}{2}) + n(\frac{n+1}{2}) - n$ paramètres.

Le "remède" à ceci est le même que pour le groupe symplectique, il consiste à séparer Σ et $T^+(2n,\mathbb{R})$ en transformant le groupe Σ à l'aide d'une matrice régulière M.

On a donc le problème suivant :

Déterminer une matrice M telle que $M^{-1} \Sigma M$ soit d'intersection réduite à $\{I\}$ avec $T^+(2n,\mathbb{R})$.

B) LE THEOREME DE DECOMPOSITION

Nous allons donner une solution à ce problème étant entendu que ce n'est surement pas la seule et que dans les algorithmes que nous proposeront il serait utile de chercher à "optimiser" cette matrice M, c'est à dire adapter la matrice M au type de problème à traiter.

LEMME

Si $M = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline \tilde{I} & I \end{array}\right)$ ou I est la matrice unité $n \times n$

$\tilde{I}$ est la matrice $n \times n$: $\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$

alors

$(M^{-1} \Sigma M) \cap T^+(2n,\mathbb{R}) = \{I\}$

1°) Supposons que :

$$\bar{M}^1 \left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline 0 & Y \end{array}\right) M \left(\begin{array}{c|c} R_1 & Z \\ \hline 0 & R_2 \end{array}\right) = \bar{M}^1 \left(\begin{array}{c|c} X' & 0 \\ \hline 0 & Y' \end{array}\right) M \left(\begin{array}{c|c} R_1' & Z' \\ \hline 0 & R_2' \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c|c} \bar{X}^{1\prime} X & 0 \\ \hline 0 & \bar{Y}^{1\prime} Y \end{array}\right) M = M \left(\begin{array}{c|c} R_1' R_1^{-1} & -R_1' R_1^{-1} Z R_2^{-1} + Z' R_2^{-1} \\ \hline 0 & R_2' R_2^{-1} \end{array}\right)$$

Ce qui s'écrit :

$$\left(\begin{array}{c|c} \bar{X}^{1\prime} X & 0 \\ \hline \bar{Y}^{1\prime} Y \tilde{I} & \bar{Y}^{1\prime} Y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} R_1' R_1^{-1} & -R_1' R_1^{-1} Z R_2^{-1} + Z' R_2^{-1} \\ \hline \tilde{I} R_1' R_1^{-1} & R_2' R_2^{-1} + \tilde{I} (-R_1' R_1^{-1} Z R_2^{-1} + Z' R_2^{-1}) \end{array}\right)$$

Donc en identifiant :

.) $Z' R_2^{-1} = R_1' R_1^{-1} Z R_2^{-1} \Rightarrow Z' = R_1' R_1^{-1} Z$

.) $\left\{ \begin{array}{l} \bar{Y}^1{}' Y = R_2' R_2^{-1} \\ \bar{Y}^1{}' Y \tilde{I} = \tilde{I} R_1' R_1^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow R_2' R_2^{-1} = \tilde{I} R_1' R_1^{-1} \tilde{I}$

Nous devons avoir une matrice triangulaire supérieure égale à une matrice triangulaire inférieure la seule solution est que ces matrices soient diagonales.

Posons :

$$D = R_2' R_2^{-1} = \tilde{I} R' R_1^{-1} \tilde{I}$$

Donc $\bar{Y}^1{}' Y = R_2' R_2^{-1} = D$ mais $\bar{Y}^1{}' Y e = e$ par définition de Σ ; par suite $De = e$ comme D est diagonale on en déduit $D = In$.

Finalement

$$\left\{ \begin{array}{l} R_2' = R_2 \\ R_1' = R_1 \end{array} \right.$$

De $\bar{Y}^1{}' Y = D = I_n \Rightarrow Y' = Y$

De $Z' = R_1' R_1^{-1} Z$ on en déduit $Z' = Z$

Et finalement de $\bar{X}^1{}' X = R_1' R_1^{-1} = I_n$ on en déduit $X' = X$, cela démontre que si la décomposition d'une matrice sous forme

$$A = \bar{M}^1 g M. R$$

existe alors elle est unique.

2°) Si maintenant il existe une matrice dans l'intersection des deux groupes

On a $\bar{M}^1 \; g \; M = R$

Donc $\bar{M}^1 \; g \; M \; \bar{R}^1 = I$ or comme I se décompose en $I \times I$ dans le produit des deux groupes on a :

$$\bar{M}^1 \; g \; M = I \Rightarrow g = I$$

$$R = I \Rightarrow R = I$$

Donc la seule matrice dans l'intersection est I_{2n} .

CONCLUSION

Les deux groupes $\bar{M}^1 \; \Sigma \; M$ et $T^+ \; (2n, \mathbb{R})$ sont en bonne position car

1°) leur intersection est vide

2°) la somme de leur dimension est $4n^2$.

L'étape suivante est de démontrer que non seulement $\bar{M}^1 \; \Sigma \; M$ et $T^+ \; (2n, \mathbb{R})$ soit en bonne position mais qu'en plus $\bar{M}^1 \; \Sigma \; M$ décompose $G\ell \; (2n, \mathbb{R})$ suivant $T^+ \; (2n, \mathbb{R})$.

THEOREME

$$G\ell \; (2n, \mathbb{R}) = \overline{\bar{M}^1 \; \Sigma \; M \; . \; T^+ \; (2n, \mathbb{R})}$$

On peut transformer le problème en prouvant simplement que l'on peut décomposer $B = MA = GMR$ avec $G \in \Sigma$ et $R \in T^+(2n, \mathbb{R})$.

Ce qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} In & 0 \\ \tilde{In} & In \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & Z \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} X & 0 \\ Y\,\tilde{In} & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & Z \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}$$

Pour presque toutes matrices je peux poser

$X = \ell_1\, r_1$ ($\ell_1 \in T_1^-(n,\mathbb{R})$; $r_1 \in T^+(n,\mathbb{R})$)

$Y = \ell_2\, r_2$ ($\ell_2 \in T_1^-(n,\mathbb{R})$; $r_2 \in T^+(n,\mathbb{R})$)

Alors

$$B = \begin{pmatrix} \ell_1 & 0 \\ Y\,\tilde{I}\,r_1^{-1} & \ell_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 R_1 & r_1 Z \\ 0 & r_2 R_2 \end{pmatrix}$$

nous obtenons aussi la décomposition LR de la matrice B

donc :

.) <u>décomposons B suivant l'algorithme de Gauss</u> (1ère étape)

Nous obtenons $\alpha = Y\,\tilde{I}\,r_1^{-1}$

comme ℓ_2 est connue aussi, on peut former $\ell_2^{-1}\alpha = r_2\,\tilde{I}\,r_1^{-1}$

Nous poserons alors $\tilde{I}\,r_2\,\tilde{I} = \lambda d$ où λ est triangulaire inférieure unitaire et d matrice diagonale (cela revient à mettre simplement la diagonale en facteur).

On a alors $\tilde{I}\,\ell_2^{-1}\,\alpha = \tilde{I}\,r_2\,\tilde{I}\,r_1^{-1}$

$$\tilde{I}\,\ell_2^{-1}\,\alpha = \lambda\, d\, r_1^{-1}$$

Ce qui est la décomposition LR de la matrice $\tilde{I}\,\ell_2^{-1}\,\alpha$.

Donc :

.) la décomposition LR de $\tilde{I}\, \ell_2^{-1}\alpha$ nous donne λ et $d\, r_1^{-1} = \rho$(2e étape)

Connaissant λ nous remarquons que $Y = \ell_2\, r_2 = \ell_2\, \tilde{I}\, \lambda\, d\, \tilde{I}$

comme nous devons avoir $Ye = e$ on a donc $\ell_2\, \tilde{I}\, \lambda\, d\, \tilde{I}\, e = e$

comme nous connaissons ℓ_2^{-1} (déjà calculée) si nous formons λ^{-1} la relation précédente nous permet d'écrire $d\, e = \lambda^{-1}\, \tilde{I}\, \ell_2^{-1}\, e$ (compte tenu du fait évident $\tilde{I}\, e = e$) ce qui détermine d.

.) l'inversion de λ permet de déterminer la diagonale d (3e étape).

Ayant d on peut en déduire $r_1 = \rho^{-1}\, d$ (notations de la 2e étape)

puis $r_2 = \tilde{I}\, \lambda\, d\, \tilde{I}$ donc $r_2^{-1} = \tilde{I}\, d^{-1}\, \lambda^{-1}\, \tilde{I}$

Connaissant r_1 et r_2 on en déduit $X = \ell_1\, r_1$

$Y = \ell_2\, r_2$

Finalement on va obtenir R_1 en considérant la décomposition LR (1ère étape) de B.

$$R_1 = r_1^{-1}\, (r_1 R_1) = d^{-1}\, \rho(r_1 R_1)$$

$$R_2 = r_2^{-1}\, (r_2 R_2) = (\tilde{I}\, d^{-1}\, \lambda^{-1}\, \tilde{I})\, r_2 R_2$$

$$Z = r_1^{-1}\, (r_1 Z) = d^{-1}\, (r_1 Z).$$

Avec les notations de la 1ère étape.

Ceci achève le raisonnement et montre l'existence de la décomposition.

Donc $\bar{M}^1\, \Sigma\, M$ décompose $G\ell\,(2n,\mathbb{R})$ suivant $T^+\,(2n,\mathbb{R})$; la façon dont s'opère la décomposition montre évidemment que $M^{-1}\, \Sigma\, M$ décompose continuement $G\ell\,(2n,\mathbb{R})$ suivant $T^+\,(2n,\mathbb{R})$.

C) CONCLUSION

Nous ne savons pas pour le groupe Σ répondre aux deux questions suivantes :

a) présenter ce groupe de manière plus naturelle, à savoir qu'elle matrice M est la meilleure numériquement et surtout comment lier cette matrice à la géométrie définie par le groupe Σ_1 ,

b) présenter un procédé d'"élimination" convenable pour retrouver cette décomposition.

Néanmoins, nous présenterons dans la troisième partie des résultats numériques obtenus par utilisation de cette décomposition.

§2) LES ALGORITHMES A MASQUES

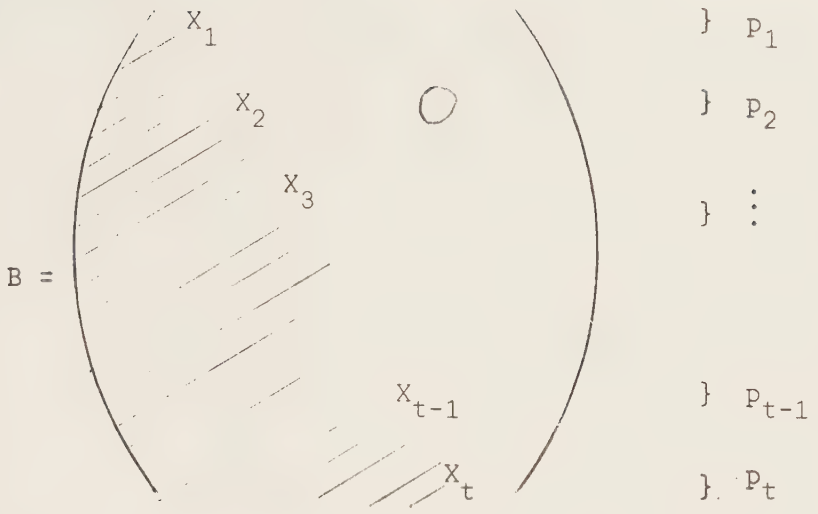
A) DEFINITION DE LA CLASSE DES MATRICES TRIANGULAIRES INFERIEURES PAR BLOC

Soient $A_1 = T_1^-(p,\mathbb{R})$ les matrices unipotentes triangulaires inférieures

$A_2 = \widehat{NSp}(q,\mathbb{R})$ le transmué du groupe des matrices symplectiques normalisées par la matrice de permutation précédemment décrite

$A_3 = U(s,\mathbb{R})$ le groupe des matrices unitaires réelles.

Nous dirons que $B \in G\ell(n,\mathbb{R})$ est du type $L(A_{i_1}(p_1) ; A_{i_2}(p_2) ; \ldots ; A_{i_t}(p_t))$ si B est de la forme :



avec

.) $X_1 \in A_{i_1}(p_1, \mathbb{R})$ et de façon générale $X_j \in A_{i_j}(p_j, \mathbb{R})$

les $A_{i_j}(p_j, \mathbb{R})$ ($i_j = 1,2$ ou 3) étant les groupes précédemment définis

.) $\sum_{j=1}^{t} p_j = n$

.) Les éléments en dessus des blocs diagonaux nuls

.) Les éléments en dessous des blocs diagonaux quelconques.

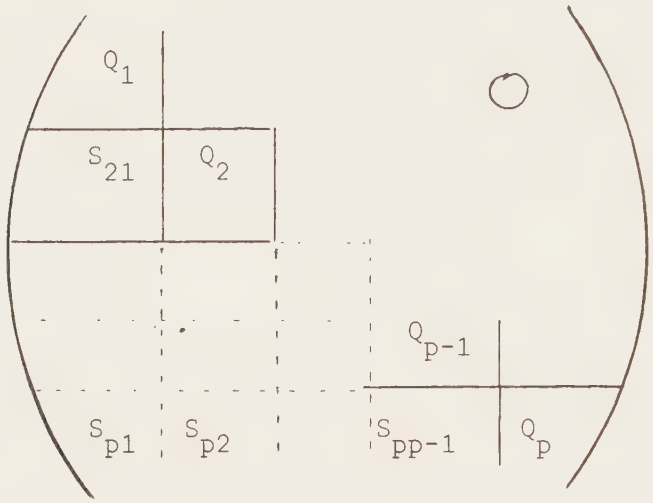
Une telle matrice B sera dite bloc triangulaire inférieure.

B) L'ALGORITHME DE DECOMPOSITION (CAS OÙ LES BLOCS DIAGONAUX SONT UNITAIRES)

Supposons une matrice $A \in G\ell(n, \mathbb{R})$; nous allons décrire l'algorithme dans le cas où nous utiliserons des blocs diagonaux orthogonaux, les autres cas s'en déduisant immédiatement.

Choisissons comme groupe triangulaire inférieure à blocs diagonaux le groupe des matrices ayant p blocs diagonaux, les matrices de ce groupe ayant la forme suivante :

$B =$



avec Q_i matrice unitaire $Q_i^t Q_i = I_{p_i}$

S_{ij} matrices rectangulaires quelconques.

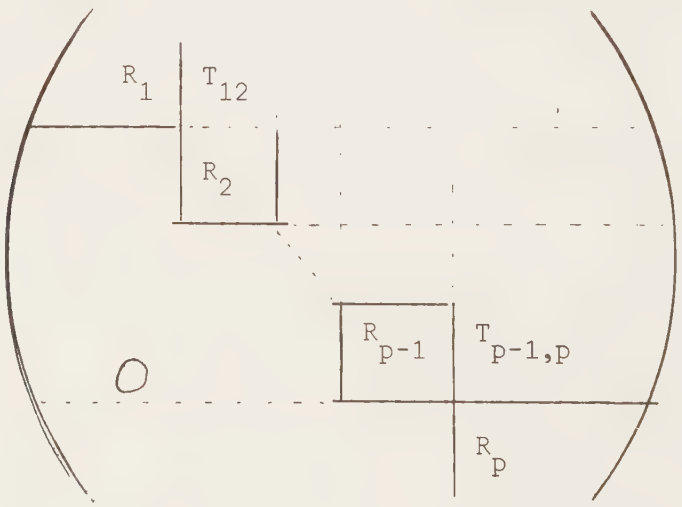
Nous supposerons que $Q_i \in U(q_i, \mathbb{R})$ soient telles que $\sum_{j=1}^{p} q_i = n$.

Le but de l'algorithme est donc d'écrire :

$$A = B\,R \quad (B \text{ du type précédent}, R \in T^+(n,\mathbb{R}))$$

Nous allons déterminer ces matrices par identifications ; pour cela posons :

$R =$

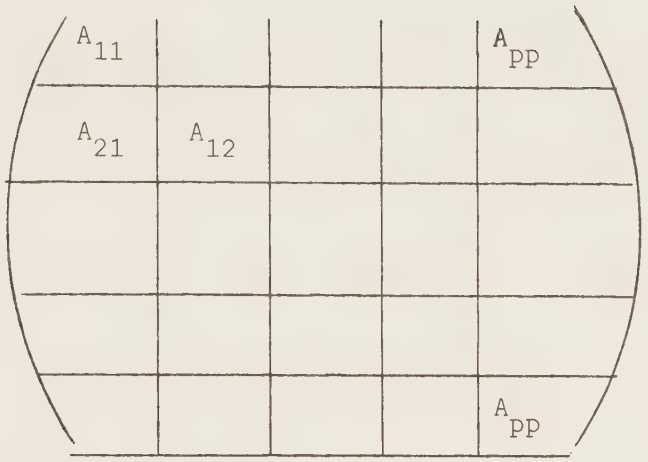


avec $R_i \in T^+(q_i, \mathbb{R})$

T_{ij} matrice rectangulaire.

Enfin découpons

$A =$



Par identification nous avons :

* $A_{11} = Q_1 R_1$ cette décomposition est possible à condition que A_1 soit régulière.
Nous ferons donc cette première hypothèse .

Nous effectuons la décomposition par l'algorithme d'orthogonalisation classique ce qui donne :

Q_1, R_1 et "en passant" R_1^{-1}

* Nous devons alors avoir :

$$A_{1i} = Q_1 T_{1i} \qquad (\forall i = 1,p)$$

Comme $Q_1^{-1} = Q_1^t$ nous déduisons par simple multiplication matricielle

$$T_{1i} = Q_1^t A_{1i}$$

Puis de la même façon : $A_{j1} = S_{j1} R_1$ comme R_1^{-1} existe on en déduit

$$S_{j1} = A_{j1} R_1^{-1}$$

Nous avons alors obtenu la première "colonne" de B et la première "ligne" de R .

* Passons alors au deuxième "pivot"

On doit avoir

$$A_{22} = S_{21}T_{12} + Q_2R_2$$

Or $S_{21} = A_{21}R_1^{-1}$ et $T_{12} = Q_1^tA_{12}$

On en déduit que l'on doit avoir

$$Q_2R_2 = A_{22} - A_{21}R_1^{-1}Q_1^tA_{12}$$

$$= A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

Pour que cette décomposition soit possible, il faut évidemment que la matrice $p_2 \times q_2$: $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ soit régulière.

Or nous retrouvons là les formules classiques de Schur permettant de calculer un déterminant d'ordre 2n à partir de déterminants d'ordre n, on sait que :

$$\det \left| \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right| = \det A_{11} \cdot \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$$

donc la condition pour que cette décomposition soit possible est que le mineur principal d'ordre $(q_1+q_2) \times (q_1+q_2)$ soit non nul.

Auquel cas la décomposition est possible et nous déterminons Q_2, R_2 et R_2^{-1},l'algorithme se déroule alors naturellement.

* Nous n'irons pas plus loin dans la récurrence car le passage d'étape p à l'étape p+1 est identique à celle du passage de la première étape à la seconde.

Nous en déduisons les deux théorèmes suivants :

THEOREME

Soit $A \in Gl(n,\mathbb{R})$; la condition nécessaire et suffisante pour que la décomposition de A en produit d'une matrice B du type spécifié plus haut, par une matrice triangulaire supérieure régulière soit possible est que les p mineurs principaux d'ordres respectifs

$$q_1$$
$$q_1+q_2$$
$$\vdots$$
$$(q_1+\ldots+q_{p-1})$$
$$n$$

soient non nuls.

Les conditions alors imposées étant vérifiées presque partout, on en déduit le théorème :

THEOREME

$$Gl(n,\mathbb{R}) = \overline{B.T^{+}(n,\mathbb{R})}$$

B désignant le groupe des matrices spécifiées plus haut.

Deux remarques avant de conclure :

1) La démonstration s'étend sans aucune difficulté aux cas des blocs de tailles différentes et dont les matrices sur la diagonale "bloc" de *B* sont de nature autre qu'orthogonales (blocs appartenant à $T_1^-(p,\mathbb{R})$; $NSp(2p,\mathbb{R})$; etc...) .

2) Le fait que l'algorithme soit vrai presque partout et que nous sachions montrer que les cas d'impossibilité sont caractérisés par la nullité de certains mineurs sera très important au chapitre suivant.

C) CONCLUSION

Nous aurons avec cet algorithme à masque une grande famille de décomposition possible, numériquement très importante si nous savons guider le choix des blocs.

Nous ne nous sommes pas intéressés aux processus d'élimination associés à de telles décompositions car ils "proviennent" (en un certain sens) des processus d'élimination des groupes simples.

Nous avons fait une étude de l'algorithme associé à des blocs diagonaux qui sont unitaires uniquement, nous donnerons cette application dans la partie III.

CHAPITRE V

LES ALGORITHMES LIMITES

§1) L'ALGORITHME LR

La décomposition de Gauss utilise $T_1^-(n,\mathbb{R})$ comme groupe de décomposition de $G\ell(n,\mathbb{R})$ suivant $T^+(n,\mathbb{R})$; nous n'apporterons évidemment rien de plus au point de vue pratique.

Ce qui au contraire nous semble théoriquement important c'est le fait de pouvoir considérer le groupe $T_1^-(n,\mathbb{R})$ comme groupe limite.

EXPLIQUONS CETTE CONCEPTION :

Considérons la chaine joignant le groupe orthogonal $\mathcal{O}(n,\mathbb{R})$ au groupe des matrices triangulaires inférieures unipotents et contruite à partir des groupes intermédiaires du type suivant :

$$B_{p_1,p_2,\ldots,p_q} = \left\{ A \in G\ell(n,\mathbb{R}),\ A = \begin{pmatrix} Q_1 & & & 0 \\ & Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & Q_q \end{pmatrix} \quad Q_i \in \mathcal{O}(p_i,\mathbb{R}) \right\}$$

$$\left(\sum_1^q p_i = n\right)$$

Ce sont les groupes considérés au chapitre précédent,(nous renvoyons pour plus de détails dans leurs définitions, au chapitre précédent).

Nous pouvons dire par exemple que $B_n = \mathcal{O}(n,\mathbb{R})$ groupe des matrices unitaires réelles.

Si nous considérons le groupe $B_{p_1,\ldots,p_q}$ la condition pour qu'une décomposition de $A \in G\ell(n,\mathbb{R})$ en $A = BR$ ($B \in B_{p_1,\ldots,p_q}$, $R \in T^+(n,\mathbb{R})$) soit possible est que

$$\Delta p_1(A) \neq 0$$

$$\Delta p_1+p_2(A) \neq 0$$

$$\vdots$$

$$\Delta n(A) \neq 0$$

(les Δ_i désignant les mineurs principaux d'ordres considérés).

On voit donc qu'a "la limite" nous allons avoir le groupe ayant le plus grand nombre de blocs diagonaux qui sera $\underbrace{B_{1,\ldots,1}}_{n \text{ fois}}$.

Si nous considérons les éléments diagonaux de ces matrices ils seront égaux à un (a une légère restriction près), nous pouvons imposer le signe + à ces éléments diagonaux et nous pouvons dire que

$$B_{1,\ldots,1} = T_1^-(n,\mathbb{R})$$

Ainsi nous avons construit l'algorithme de décomposition de Gauss comme limite d'algorithmes de type semi simple.

Cette conception est intéressante car elle nous donne une interprétation directe de la condition nécessaire et suffisante bien connue pour qu'une matrice se décompose sous la forme LR et qui est que tous ses mineurs principaux soient non nuls.

En effet il est a peine nécessaire d'expliciter cela car d'après le théorème du chapitre précédent sur la décomposition BR la condition pour que la décomposition : $B_{1,\ldots,1}\ T^+(n,\mathbb{R})$ soit possible est que :

$\Delta_1(A) \neq 0$

$\Delta_2(A) \neq 0$

$\Delta_3(A) \neq 0$

$\vdots$

$\Delta_n(A) \neq 0$

Ce qui prouve l'assertion classique sur la décomposition de Gauss.

CONCLUSION

Nous pensons que cette façon de créer un groupe par passage à la limite devrait être exploitée pour la création d'autres groupes de décomposition.

En fait un grand travail est aussi à faire pour comparer les coûts de ces divers algorithmes et étudier leurs performences respectives dans les applications que nous allons donner.

§2) LA DECOMPOSITION DE BRUHAT.

Une variante de la décomposition de Gauss est connue en théorie des groupes de Lie sous la forme de décomposition de Bruhat [1].
Nous allons exposer en détail cette décomposition pour une raison théorique : elle permet de jeter une lueur sur l'importance de la matrice de permutation qui intervient dans la décomposition de Gauss avec nullité du pivot.

Le problème avait été abordé par Wilkinson [2] mais les démonstrations que nous donnons nous semblent plus élémentaires. D'autre part nous énonçons le résultat de Bruhat dans un cadre plus large [3].

A - L'ALGORITHME DE DECOMPOSITION GENERALISEE DE BRUHAT DE $M_n(\mathbb{R})$

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ et $\tilde{I}$ la matrice de permutation ainsi formée

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Nous noterons

$$A^{(\hat{o})} = A\tilde{I}$$

$$A^{(o)} = (a_{ij}^{(o)})$$

A cette matrice $A^{(o)}$ nous allons appliquer l'élimination de Gauss sous la forme suivante :

PREMIERE ETAPE :

On considère la première colonne de $A^{(o)}$ deux cas sont possibles

1°) Il existe un indice i_1 tel que :

. $\forall i < i_1 \Rightarrow a_{i,1}^{(o)} = 0$

. $a_{i_1,1}^{(o)} \neq 0$

A partir de cette i_1-ème ligne, on applique l'élimination de Gauss ce qui revient à prémultiplier $A^{(o)}$ par la matrice Γ_{i_1} suivante :

$$\Gamma_{i_1} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1}}^{n} \left(I - \frac{a_{ji}}{a_{i_1,1}} E_{j,i_1}\right)$$

2°) Pour tous les indices i on a $a_{i,1}^{(o)} = 0$ dans ce cas la matrice est singulière, nous poserons alors par définition $i_1 = 0$ et $\Gamma_{i_1} = I$.

On forme alors :

$$A^{(1)} = \Gamma_{i_1} A^{(o)}$$

$I_1 = \{i_1\}$ dans le premier cas

$= \{0\}$ dans le second cas

et comme d'habitude $A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)})$.

Supposons maintenant être à la pième colonne et passons à la p+1 ième colonne.

PREMIERE ETAPE :

Nous avons à notre disposition un ensemble de p indices I_p

$$I_p = \{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$$

possédant les propriétés suivantes :

(1) $\forall j,\ 1 \leq i \leq n$

(2) Si $j \neq k$ et i_j et i_k différents de zéros alors $i_j \neq i_k$.

D'autre part, nous avons la matrice

$$A^{(p)} = \Gamma_{i_p} \ldots \Gamma_{i_1} A^{(o)}$$

$$A^{(p)} = (a_{ij}^{(p)})$$

Γ_{ij} appartenant à STL(n,k) pour tout indice j.

Considérons alors la p+1 ième colonne. Il y a plusieurs possibilités.

1°) Il existe un indice i_{p+1} tel que

i) $a_{i_{p+1},p+1}^{(p)} \neq 0$

ii) $i_{p+1} \notin I_p$

iii) $\forall i < i_{p+1}$ soit $i \in I_p$ soit $a_{i,p+1}^{(p)} = 0$

(on est assuré que cette colonne est indépendante des précédentes).

Dans ce cas, on prémultiplie $A^{(p)}$ par

$$\Gamma_{i_{p+1}} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \notin I_{p+1}}}^{n} \left(I - \frac{a_{j,p+1}}{a_{i_{p+1},p+1}} E_{j,i_{p+1}}\right)$$

avec

$$I_{p+1} = I_p \cup \{i_{p+1}\} .$$

On obtient alors :

$$A^{(p+1)} = \Gamma_{i_{p+1}} A^{(p)}$$

2°) Quelque soit l'indice j, $a^{(p)}_{j,p+1} = 0$, on pose alors $\Gamma_{i_{p+1}} = I$ et $I_{p+1} = I_p \cup \{0\}$ et l'on passe à la colonne suivante (la matrice A est une matrice singulière).

3°) $\forall j$ tel que $a^{(p)}_{j,p+1} \neq 0 \Rightarrow j \in I_p$ la matrice A était donc singulière, on passe à la colonne suivante en utilisant les notations de 2°).

On achève ainsi le raisonnement avec :

$$\left| \begin{array}{l} A^{(n)} = \Gamma_{i_n} \ldots \Gamma_{i_1} A^{(o)} \\ \\ I_n = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} . \end{array} \right.$$

Considérons alors I_n, nous voyons que deux cas sont à considérer.

1°) Quelque soit l'indice j, $i_j \neq 0$ alors I_n représente <u>une permutation</u> de l'ensemble d'indices $\{1,2,\ldots,n\}$.

Soit σ cette permutation qui est définie par $\sigma(j) = ij \quad \forall j$ et posons P_σ la matrice de permutation associée, c'est-à-dire défini par

$$P = \left| \begin{array}{l} e^t_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e^t_{\sigma(n)} \end{array} \right.$$

où les e_j sont les vecteurs de la base canonique.

(Cette matrice peut s'interpréter comme étant la "perturbation" qui sépare la matrice $A^{(n)}$ d'une matrice triangulaire supérieure).
Nous avons en fait :

$$A^{(n)} = P_\sigma . R \qquad \text{(R triangulaire supérieure)}$$

Mais tenant compte du fait que toute matrice R triangulaire supérieure peut s'écrire $R = \tilde{I}\, L\, \tilde{I}$ avec L triangulaire inférieure, nous pouvons écrire :

$$A^{(n)} = P_\sigma \tilde{I} . T \tilde{I} \quad \text{où T est triangulaire inférieure.}$$

Nous avons alors :

$$A^{(n)} = \Gamma_{i_n} \dots \Gamma_{i_1} A^{(o)} = \Gamma_{i_n} \dots \Gamma_{i_1} A \tilde{I} \qquad (1)$$

$$= P_\sigma \tilde{I}\, T\, \tilde{I} \qquad (2)$$

(1) et (2) entraînent donc :

$$A = (\Gamma_{i_n} \dots \Gamma_{i_1})^{-1} P_\sigma \tilde{I} T .$$

Mais si nous utilisons le fait que $T_1^-(n,\mathbb{R})$ est un groupe, il existe L appartenant à $T_1^-(n,\mathbb{R})$ telle que :

$$L = (\Gamma_{i_n} \dots \Gamma_{i_1})^{-1} .$$

A s'écrit finalement, si nous posons $P_\sigma \tilde{I} = \tilde{P}_\sigma$ matrice de permutation :

$$\underline{A = L \tilde{P}_\sigma T} \qquad (*)$$

$(L \in LET_1^-(n,\mathbb{R})$, T triangulaire inférieure,

$\tilde{P}_\sigma \in P(n,\mathbb{R})$.

2°) Il existe au moins un indice j tel que $i_j = 0$ (avec nos conventions). Alors il est évident qu'un indice de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ est inutilisé et de ce fait on peut toujours le mettre à cette place dans la matrice P_σ , ce qui redonnera un sens à la décomposition (⊕) précédente.

Il est bien évident que cette écriture aura beaucoup moins de valeur que dans le cas précédent.

Avant d'énoncer le théorème final, il est nécessaire de bien distinguer les deux cas précédents, la discussion est d'ailleurs immédiate, car d'après la démonstration par récurrence faite précédemment, si tous les indices de I_n sont distincts de zéro (et donc distincts entre eux) c'est-à-dire si I_n est simplement une permutation de $\{1,\ldots,n\}$ c'est que la matrice A est non singulière, le cas (2) étant le cas des matrices singulières.

On peut énoncer le théorème suivant :

THEOREME 1 : Décomposition généralisée de Bruhat.

Tout élément A de l'algèbre M_n peut s'exprimer comme produit de trois matrices

$A = L\ P\ T$

avec L matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale
P matrice de permutation
T matrice triangulaire inférieure.

Ce que l'on peut aussi énoncer dans le cas où A est régulière

COROLLAIRE

Toute matrice A régulière peut s'écrire comme produit de quatre matrices, L, P, D, L'

$A = L\ P\ D\ L'$

avec L et $L' \in T_1^-(n,\mathbb{R})$
$P \in P(n,\mathbb{R})$
$D \in D(n,\mathbb{R})$

Cela provient immédiatement du fait que $T^-(n,k) = D(n,k).T_1^-(n,k)$.

Dans tout ce qui va suivre, nous allons travailler avec des matrices non singulières, c'est-à-dire avec $G\ell(n,$ dans ce cas et compte tenu de la discussion du point (2) du théorème précédent, il n'y a aucune ambiguité sur la construction de la matrice de permutation associée à la décomposition.

B - "UNICITE" DE LA DECOMPOSITION DE BRUHAT DANS $G\ell(n,\mathbb{R})$

EXEMPLE CARACTERISTIQUE :

Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice de permutation.

alors cette matrice admet une infinité de décomposition au sens qui précède.
En effet :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \underline{a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\underline{a} & 1 \end{pmatrix}$$

Il est donc inutile de chercher une unicité "globale", néanmoins on peut remarquer dans l'exemple précédent que la matrice de permutation qui apparaît dans la décomposition de P n'est rien d'autre que P elle-même.
C'est là le point important dans la décomposition de Bruhat.

LEMME FONDAMENTAL :

> Si P_1 et P_2 sont deux matrices de $P(n,k)$, alors $P_1 = LP_2T \Rightarrow P_1 = P_2$
> ($L \in T_1^-(n,\mathbb{R})$, T triangulaire inférieure régulière).

On va utiliser un raisonnement par l'absurde. Si nous écrivons :

$$P_1 = \begin{vmatrix} e^t_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e^t_{\sigma(n)} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad P_2 = \begin{vmatrix} e^t_{\tau(1)} \\ \vdots \\ e^t_{\tau(n)} \end{vmatrix}$$

ou σ et τ désignent les permutations associées à ces deux matrices.

Dire que $P_1 \neq P_2$ c'est dire qu'il existe au moins un indice i tel que :

$$\sigma(1) = \tau(1)$$
$$\sigma(2) = \tau(2)$$
$$\vdots$$
$$\sigma(i-1) = \tau(i-1)$$
$$\sigma(i) > \tau(i)$$

(si $\sigma(i) < \tau(i)$, on traitera le problème de la même manière).

Développons d'abord l'égalité $P_1 = L\,P_2\,T$. On a :

$$\begin{pmatrix} e^t_{\sigma(1)} \\ \\ \\ e^t_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t_1 & & & \\ e^t_2+\ell_{21}e^t_1 & & & \\ \vdots & & & \\ e^t_n+\ell_{n1}e^t_1+\ldots+\ell_{n,n-1}e^t_{n-1} & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t_{\tau(1)} \\ \\ \\ e^t_{\tau(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11}e^t_1 \\ t_{21}e^t_1+t_{22}e^t_2 \\ \vdots \\ t_{n1}e^t_1+\ldots+t_{n,n}e^t_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t_1 \\ e^t_2+\ell_{21}e^t_1 \\ \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{\tau(1),1}e^t_1+\ldots+t_{\tau(1),\tau(1)}e^t_{\tau(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_{\tau(n),1}e^t_1+\ldots+t_{\tau(n),\tau(n)}e^t_{\tau(n)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t_{\tau(1),1}e^t_1+\ldots+t_{\tau(1),\tau(1)}e^t_{\tau(1)} \\ (t_{\tau(2),1}e^t_1+\ldots+t_{\tau(2),\tau(2)}e^t_{\tau(2)})+\ell_{21}(t_{\tau(1),1}e^t_1+\ldots+t_{\tau(1),\tau(1)}e^t_{\tau(1)}) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

L'égalité des deux matrices entraîne donc :

$$e^t_{\sigma(1)} = t_{\tau(1),1}e^t_1+\ldots+t_{\tau(1),\tau(1)}e^t_{\tau(1)}$$

mais par hypothèse

$$\sigma(1) = \tau(1)$$

Donc on doit avoir

$$t_{\tau(1),1} = \ldots = t_{\tau(1),\tau(1)-1} = 0$$

$$t_{\tau(1),\tau(1)} = 1$$

La deuxième ligne devient donc :

$$e^t_{\sigma(2)} = \ell_{21}e^t_{\tau(1)}+(t_{\tau(2),1}e^t_1+\ldots+t_{\tau(2),\tau(2)}e^t_{\tau(2)})$$

comme $\sigma(2) = \tau(2)$, on doit avoir $t_{\tau(2),\tau(2)} = 1$. D'autre part, tous les termes autres que les coefficients de $e^t_{\tau(1)}$ doivent être nuls.

On peut donc écrire symboliquement :

$$e^t_{\sigma(2)} = e^t_{\tau(2)} + e^t_{\tau(1)}(\ell_{21} + t_{\tau(2),\tau(1)})$$

avec la convention que si $\tau(1) > \tau(2)$ alors $\ell_{21} = 0$ et évidemment $t_{\tau(2),\tau(2)}$ n'existe pas.
Si par contre $\tau(1) < \tau(2)$ on prendra $\ell_{21} = -t_{\tau(2),\tau(1)}$.

Par récurrence, on voit qu'à la i-1 ème ligne on aura l'égalité :

$$e^t_{\sigma(i-1)} = e^t_{\tau(i-1)} + \sum_{j=1}^{t-1} \theta_j e^t_{\sigma(j)} .$$

Passons alors à la ième ligne : on a donc :

$$e^t_{\sigma(i)} = t_{\tau(i),1} e^t_1 + \ldots + t_{\tau(i),\tau(i)} e^t_{\tau}(i)$$

+ une combinaison linéaire des lignes précédentes, ce qui peut s'écrire :

$$= t_{\tau(i),1} e^t_1 + \ldots + t_{\tau(i),\tau(i)} e^t_{\tau(i)} + F\,(e^t_{\sigma(1)}, \ldots, e^t_{\sigma(i-1)})$$

On voit donc la contradiction : comme $\sigma(i) > \tau(i)$ par hypothèse, il est impossible que $e^t_{\sigma(1)}$ ait des composantes sur $e^t_{\tau(i)}$ donc le coefficient de $e^t_{\tau(i)}$ doit être nul => $t_{\tau(i),\tau(i)} = 0$ (car on ne rencontre $e^t_{\tau(i)}$ nulle part ailleurs dans le second membre).
Or ceci est impossible car la matrice T est régulière.

c.q.f.d.

APPLICATIONS

1°) Il est immédiat d'après le raisonnement précédent que non seulement la matrice P est unique dans une décomposition de Bruhat, mais aussi la matrice diagonale (il suffisait en fait de considérer les mineurs principaux.)

Donc on peut dire, en remarquant que le produit d'une matrice de permutation par une matrice diagonale est une matrices monomiale du groupe $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ que l'on a le théorème suivant :

THEOREME II

1°) Le groupe linéaire $G\ell(n,\mathbb{R})$ est produit direct des trois groupes suivants :

$$G\ell(n,\mathbb{R}) = T_1^-(n,\mathbb{R}) \times \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \times T_1^-(n,\mathbb{R}).$$

2°) Dans la décomposition d'une matrice régulière A, dans la décomposition de Bruhat

$$A = L.PD\ L'$$

la matrice monomiale PD est unique.

2°) Ceci nous permet de définir une relation d'équivalence dans le groupe linéaire :

A et $B \in G\ell(n,\mathbb{R})$ seront dites équivalentes $\mathcal{R}$ dans la décomposition de Bruhat. Elles admettent la même matrice de permutation.

Cette relation d'équivalence découpe le groupe linéaire en un certain nombre (n!) de classes que nous noterons $\tilde{C}(P)$. Donc :

COROLLAIRE 1

$$G\ell(n,\mathbb{R}) = \bigcup_{P \in p(n,\mathbb{R})} \tilde{C}(P)$$

3°) On peut aussi mettre sur le groupe linéaire une relation d'équivalence plus fine que la précédente :

A et $B \in G\ell(n,\mathbb{R})$ seront dites équivalentes $\mathcal{R}$ dans la décomposition de Bruhat. Elles admettent la même matrice monomiale.

Cette relation d'équivalence découpe le groupe linéaire en un nombre de classes (qui n'est plus fini car $\sim n! \times \mathbb{R}^n$) que nous noterons C(m) (pour $m \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R})$).

COROLLAIRE 2

$$G\ell(n,\mathbb{R}) = \bigcup_{m \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R})} C(m)$$

Remarque :

Les classes C(m) sont les classes d'une relation d'équivalence plus fine que celle correspondante aux classes $\tilde{C}(P)$, de ce fait on peut écrire de façon immédiate :

$$\tilde{C}(P) = \bigcup_{D \in D(n,\mathbb{R})} C(PD)$$

Donc finalement :

$$Gl(n,\mathbb{R}) = \bigcup_{\substack{D \in D(n,\mathbb{R}) \\ P \in P(n,\mathbb{R})}} C(P.D)$$

4°) On peut aussi interpréter ces classes de la façon suivante :

On forme le groupe produit direct de $T_1^-(n,\mathbb{R})$ par lui-même :

. c'est l'ensemble $T_1^-(n,\mathbb{R}) \times T_1^-(n,\mathbb{R})$

. on le muni de la loi $(L,L') \times (L_1,L_1') = (LL_1, L'L_1')$ qui en forme un groupe.

Puis on considère l'application :

$$T_1^-(n,\mathbb{R}) \times T_1^-(n,\mathbb{R}) \times Gl(n,\mathbb{R}) \to Gl(n,\mathbb{R})$$

$$[(L,L'),A] \to LAL'^{-1} .$$

(au premier membre on a le produit cartésien de $T_1^-(n,\mathbb{R}) \times T_1^-(n,\mathbb{R})$ par le groupe $Gl(n,\mathbb{R})$).

Cette application est une action de $T_1^-(n,\mathbb{R}) \times T_1^-(n,\mathbb{R})$ dans $Gl(n,\mathbb{R})$, (en d'autre terme $Gl(n,\mathbb{R})$ est un groupe à opérateur).

Il est alors immédiat que les trajectoires (ou les orbites) de $T_1^-(n,\mathbb{R}) \times T_1^-(n,\mathbb{R})$ dans $Gl(n,\mathbb{R})$ sont les ensembles :

$$T_1^-(n,\mathbb{R})\, A\, T_1^-(n,\mathbb{R})$$

Or A peut toujours être décomposé d'après Bruhat et l'orbite précédente peut s'écrire :

$$T_1^-(n,\mathbb{R})[L.PDL'] \times T_1^-(n,\mathbb{R})$$
$$= T_1^-(n,\mathbb{R})PD.T_1^-(n,\mathbb{R}) = C(PD)$$

avec la notation précédente.

Ces orbites s'appellent, d'après Bourbaki, les doubles classes de $G\ell(n,\mathbb{R})$ suivant $T_1^-(n,\mathbb{R})$.

Donc :

COROLLAIRE 3

> Les classes d'équivalences C(m), $m \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ sont les doubles classes de $G\ell(n,\mathbb{R})$ suivant $T_1^-(n,\mathbb{R})$.

5°) Parmi toutes les classes "grossières $\tilde{C}(P)$, il en existe une qui possède une propriété très importante pour la suite, c'est la classe $C(\tilde{I})$.

Nous avons vu en effet, que si A = LPT ($L \in T_1^-(n,\mathbb{R})$, $T \in T_1^-(n,\mathbb{R})$) de façon générale, on ne peut rien dire sur l'unicité de L et de T. Néanmoins, dans la classe $\tilde{C}(\tilde{I})$ si

$$A = L.\tilde{I}T = L'\tilde{I}T'$$

Ceci est parfaitement équivalent à

$$L\,\tilde{I}\,T\,\tilde{I} = L'\,\tilde{I}\,T'\,\tilde{T} \qquad (5')$$

or nous savons que :

$$\tilde{I}\,T\,\tilde{I} = R$$

$$\tilde{I}\,T'\,\tilde{I} = R' \quad \text{avec R et R' appartenant à } T^+(n,\mathbb{R}) \text{ donc}$$

(5') peut s'écrire $LR = L'R' = A\tilde{I}$ si une matrice admet une unique décomposition sous la forme L.U avec $U \in T^+(n,\mathbb{R})$ et $L \in T^+(n,\mathbb{R})$. On en déduit L = L' et T = T'.

D'où -

THEOREME 4

> Dans la classe $\tilde{C}(\tilde{I})$ la décomposition d'une matrice régulière sous la forme $A = L\,\tilde{I}\,T$ est unique.

C - CONCLUSION

La décomposition de Bruhat nous semble intéressante pour les raisons suivantes :

(1) elle a un rapport certain avec les classes obtenues par orthogonalisation de Graev et c'est peut être un moyen d'étudier le phénomène limite qu'est l'algorithme LR.

(2) la classe $\tilde{I}$ est la plus "grosse" or si à une matrice $A = L \tilde{I} D L'$ de cette classe, nous appliquons l'algorithme LR de Rutishauser nous lui faisons subir des similitudes par des éléments de $T_1^-(n,\mathbb{R})$ donc nous nous déplaçons dans cette classe au cours de l'algorithme LR.

La trajectoire discrète de cette matrice serait très utile a étudier car si nous pouvions calculer la "distance" de cette trajectoire a une sous-classe définie par une matrice de permutation $P \neq \tilde{I}$ nous pourions préciser la stabilité de cet algorithme ; cette remarque qui nous a été communiquée par Monsieur le Professeur B. Parlett semble être une voie très prometteuse pour l'étude théorique de l'algorithme LR.

TROISIEME PARTIE

APPLICATIONS ET RESULTATS NUMERIQUES

CHAPITRE I

INTRODUCTION

Dans cette partie, nous nous proposons de donner les applications pratiques des algorithmes de décompositions décrits dans la deuxième partie.

Nous ne nous sommes intéressés qu'à deux types d'applications :

1) les méthodes directes de résolution de systèmes linéaires
2) les algorithmes de recherche de valeurs propres.

Nous avons effectivement testé les algorithmes suivants pour la recherche des valeurs propres :

a) un procédé d'orthogonalisation du type Hilbert-Schmidt-Graev à normalisation, dont nous expliquerons le mécanisme plus loin

b) un procédé utilisant l'algorithme symplectique normalisé

c) un procédé utilisant l'algorithme de décomposition Σ

d) un procédé semi-simple (triangulaire inférieure par bloc).

D'autre part, dans un paragraphe e), nous présentons un algorithme de type QL qui est certainement connu vu sa simplicité, mais qui nous fournit le seul exemple où nous pouvons (d'ailleurs assez artificiellement) échapper à une décomposition de $G\ell(n,\mathbb{R})$ suivant $T^+(n,\mathbb{R})$.

CHAPITRE II

LES METHODES DIRECTES DE RESOLUTION DE SYSTEMES LINEAIRES

La remarque fondamentale est :

> Toute méthode de décomposition de $G\ell(n,\mathbb{R})$ suivant $T^+(n,\mathbb{R})$ conduit à une méthode directe de résolution de systèmes linéaires.

En effet, si nous avons à résoudre $Ax = b$ ($A \in M(n,\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$) et si G décompose $G\ell(n,\mathbb{R})$ suivant $T^+(n,\mathbb{R})$, nous pouvons écrire (presque partout) si $A = gR$ ($g \in G$ et $R \in T^+(n,\mathbb{R})$)

$$g.R\ x = b \qquad (1)$$

G étant un groupe g^{-1} existe et nous avons

$$R\ x = g^{-1}\ g \qquad (2)$$

La résolution se faisant alors par simple retour arrière.

Le problème qui se pose est donc "d'inverser" g, ou plus pratiquement d'arriver immédiatement à (2).

Etudions sommairement les divers algorithmes en présence :

a) L'algorithme d'orthogonalisation et d' "élimination"

Si nous arrivons par une de ces deux méthodes à décomposer $A \in G\ell(n,\mathbb{R})$ en $A = g\ R$ ($g \in O(p,\mathbb{R})$; $R \in T^+(n,\mathbb{R})$ nous pouvons facilement inverser g ; en effet, nous savons, d'après la définition de $O(p,\mathbb{R})$ que g vérifie

$$g^t\ G_p\ g = G_p.$$

Ce qui peut s'écrire puisque $G_p^2 = I$ sous la forme

$$G_p \, g^t \, G_p \, g = I_n$$

donc l'inverse de g est $G_p \, g^t \, G_p$ matrice qu'il est facile de construire numériquement.

Donc tout procédé d'orthogonalisation ou d'élimination par orthogonalités conduit à une méthode numériquement intéressante.

b) Les algorithmes symplectiques

Nous avons vu que $G\ell(2n,\mathbb{R}) = \overbrace{Sp(2n,\mathbb{R})} \cdot \bar{\Gamma}$ donc on peut décomposer $A \in G\ell(2n,\mathbb{R})$ presque toujours en

$$A = \hat{S} \, R \quad (\hat{S} \in \overbrace{Sp(2n,\mathbb{R})} \, , \; R \in \hat{\Gamma}).$$

avec $\hat{S} = P \, S \, P^t$ (P matrice de permutation fixée et $S \in Sp(2n,\mathbb{R})$)

On a donc $A = P \, S \, P^t \, R$ (1)

Résoudre $Ax = b$ (1)

revient donc à résoudre $P \, S \, P^t \, R \, x = b$ donc $S \, P^t \, R \, x = P^t \, b$ (2)

Si nous considérons alors que S est symplectique, elle vérifie

$$S^t \, J \, S = J$$

donc (2) devient

$$S^t \, J \, S \, P^t \, R \, x = S^t \, J \, P^t \, n \qquad (3)$$

c'est-à-dire $J \, P^t \, R \, x = S^t \, J \, P^t \, b$ (4)

d'où finalement $Rx = -P \, J^t \, S^t \, J \, P^t \, b$ (5)

Il est alors facile de résoudre (5) par une simple méthode de retour arrière.

Deux remarques :

1) Nous pourrions aussi bien travailler avec

   .) la décomposition symplectique normalisée (mais elle coûte plus cher)

   .) la décomposition $S\Gamma$ mais résoudre $\Gamma x = b'$ est moins commode qu'un retour arrière.
   (En fait, il suffit d'utiliser la matrice de permutation).

2) L'algorithme symplectique, comme nous l'avons vu, coûte moins cher au point de vue multiplication que l'algorithme QR, donc le procédé de résolution est numériquement intéressant.

   Si, en plus, nous utilisons le procédé d' "élimination" symplectique, il est bien évident que nous pouvons encore diminuer ce coût et l'algorithme est aussi compétitif que les algorithmes habituels.

c) Les algorithmes semi simples

L'algorithme Σ_1 et l'algorithme à masque ne sont pas adaptés numériquement aux méthodes directes ; il est évident que nous pouvons les utiliser mais leurs nombres d'opérations sont bien trop élevés pour être intéressant dans ce cadre-là.

d) Les algorithmes limites

S'agissant de l'algorithme LR, nous n'avons évidemment rien à ajouter à l'algorithme de Gauss qui est déjà largement étudié par ailleurs. Quant à la décomposition de Bruhat, bien que conduisant évidemment à des méthodes directes de résolution, elle n'apporte rien de plus en pratique que la méthode de Gauss.

CHAPITRE III

LES ALGORITHMES DE RECHERCHE DE VALEURS PROPRES

Tous les algorithmes que nous allons décrire sont la conséquence et l'application du théorème de Rutishauser généralisé que nous avons présenté dans la première partie.

§1) LES ALGORITHMES D'ORTHOGONALISATION AU SENS DE GRAEV MODIFIES

Nous avons vu qu'une grande difficulté rencontrée dans l'utilisation de cet algorithme est qu'une matrice de permutation peut fort bien être nécessaire pour faire la décomposition.

Nous proposons une méthode afin de lever cette difficulté.

a) Description de l'algorithme

C'est un procédé d'orthogonalisation à l'aide de la forme bilinéaire symétrique

$$\Omega_p(X,Y) = X^t \begin{pmatrix} +1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & +1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} Y$$

avec p signes plus et n-p signes moins.

Comme nous allons donner la "liste" de cet algorithme, contentons-nous de montrer la $i^{ème}$ étape de l'algorithme :

On pose $\theta_i = A._i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{ji} C_j$

On introduit les relations d'orthogonalité $\Omega_p(\theta_i, C_j) = 0 \quad \forall j \leq i-1$
ce qui permet d'écrire

$$\Omega_p(A._i, C_j) + \lambda_{j,i}\, \Omega(C_j, C_j) = 0 \qquad \text{donc de déterminer } \lambda_{ji}.$$

On obtient alors

$$\theta_i = \xi_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\Omega_p(A._i, C_j)}{\Omega_p(C_j, C_j)}\, C_j$$

et l'on normalise en calculant $\lambda_{ii} = \dfrac{1}{e^t \theta_i}$ de telle façon qu'en posant

$C_i = \lambda_{ii}\, \theta_i$ on ait $e^t C_i = 1$.

Ce qui détermine les colonnes de la matrice transformée.

b) La "liste" de cet algorithme

```
BEGIN
COMMENT CETTE PROCEDURE ECRIT DES MATRICES DU TYPE
SPECIFIE  ;
PROCEDURE ECRIRE(REAL ARRAY A(*,*);INTEGER N) ;

FOR I:=1 UNTIL N DO
BEGIN
WRITE("  ") ;
FOR J :=1 UNTIL N DO
WRITEON (A(I,J)) ;
END ECRIRE ;

COMMENT CETTE PROCEDURE CALCULE LE PRODUIT SCALAIRE AVEC
P SIGNES -  ;
REAL PROCEDURE PRODSCAL(INTEGER P,N ;REAL ARRAY X,Y(*) ) ;
BEGIN
REAL S; S:=0. ;
FOR I:=1 UNTIL P DO
S:=S+X(I)*Y(I) ;
FOR I:=P+1 UNTIL N DO
S:=S-X(I)*Y(I) ;
S
END PRODSCAL ;


INTEGER N,P,ITER,T ;
REAL S,EPS ;
INTFIELDSIZE:=4 ;
READON(N,P,EPS,ITER) ;

COMMENT N EST LA TAILLE DE LA MATRICE
      P LE NOMBRE DE SIGNES +DE LA FORME
      EPS UN TEST DE SAUVEGARDE SUR LE PIVOT
      ITER LE NOMBRE D ITERATIONS DEMANDEES ;
 BEGIN
REAL ARRAY A,R,B(1::N,1::N) ;
REAL ARRAY L,OMEGA(1::N) ;
FOR I:= 1 UNTIL N DO
BEGIN
FOR J := 1 UNTIL N DO
READON(A(I,J)) ;
END ;
WRITE("MATRICE INITIALE ") ;WRITE(" ") ;
ECRIRE(A,N) ;WRITE("  ") ;
FOR T:=1 UNTIL ITER DO
COMMENT C EST LA BOUCLE D ITERATION ;


BEGIN
FOR I :=1 UNTIL N DO
BEGIN FOR J :=1 UNTIL N DO
R(I,J) :=0. ;
R(I,I) :=1
END ;

COMMENT INITIALISATION DE R A L IDENTITE ;
FOR I :=1 UNTIL N DO
BEGIN
FOR J :=1 UNTIL I-1 DO
L(J):=- PRODSCAL(P,N,A(*,I),A(*,J) )/OMEGA(J) ;
S:=0. ;
FOR J:=1 UNTIL N DO
S:=S+A(J,I)  ;
```

```
FOR J:=1 UNTIL I-1 DO
S:=S+L(J) ;
IF ABS(S)<=EPS THEN GOTO JOJO ;
COMMENT LE PIVOT EST TROP PETIT ;
L(I):=1. ;
FOR K:=1 UNTIL N DO
A(K,I):=PRODSCAL(I,I,L,A(K,*))/S ;
L(I):=S ;
OMEGA(I):= PRODSCAL(P,N,A(*,I),A(*,I)) ;
IF ABS(OMEGA(I))<=EPS THEN GOTO TILT ;
FOR J:=1 UNTIL I-1 DO
L(J) :=-L(J) ;
FOR J:=1 UNTIL I DO
R(J,I) :=L(J) ;
END ;


FOR I:=1 UNTIL N DO
FOR J:=1 UNTIL N DO
B(I,J) :=PRODSCAL(N,N,R(I,*),A(*,J)) ;
COMMENT SORTIE DE LA PARTIE TRIANGULAIRE SUPERIEURE ;
WRITE("MATRICE R") ;WRITE(" ") ;
ECRIRE(R,N) ; WRITE(" ") ;

COMMENT SORTIE DE LA PARTIE ORTHOGONALE  ;
WRITE(" MATRICE Q") ;
WRITE(" ") ;
ECRIRE(A,N) ;
WRITE(" ") ;
FOR I:=1 UNTIL N DO
FOR J:=1 UNTIL N DO
A(I,J):=B(I,J) ;
WRITE(" MATRICE RQ A LA ",T,"IEME ITERATION ");
WRITE(" ") ;
ECRIRE(A,N) ; WRITE(" ") ; WRITE(" ") ;
END ;
GOTO FIN ;


TILT: WRITE(" ") ;
     WRITE("JE SUIS TOUT PETIT ") ;
GOTO FIN ;
JOJO:WRITE(" ") ;
    WRITE("S A DES DOULEURS ") ;
  WRITE(S) ;
FIN :END;
END .
```

c) Les résultats numériques

Nous allons traiter un seul exemple pour ne pas alourdir l'exposé :

1°) Nous utilisons le produit scalaire avec 6 signes plus :

MATRICE INITIALE

2.000000	4.000000	0	0	0	0
-5.000000	13.00000	-2.000000	0	0	0
-13.00000	29.00000	-15.00000	5.000000	0	0
-25.00000	61.00000	-48.00000	18.00000	0	0
-36.00000	80.00000	-38.00000	-26.00000	32.00000	-6.000000
-34.00000	24.00000	140.0000	-250.0000	155.0000	-29.00000

MATRICE R

-111.0000	191.6656	67.34566	-302.3606	217.6617	-40.73955
0	19.33434	-64.17079	84.57773	-47.47643	8.880412
0	0	33.82513	-46.81664	26.56357	-4.969614
0	0	0	11.59950	-9.750975	1.829045
0	0	0	0	0.002119064	-0.0007661238
0	0	0	0	0	0.0004904848

MATRICE Q

-0.01801801	0.3855025	0.7672228	-0.1839902	23.57065	21.14627
0.04504504	0.2258372	0.2756311	0.6561015	-53.33122	-46.31732
0.1171171	0.3389138	-0.03367248	0.8768142	20.18091	13.04149
0.2252252	0.9223002	-0.1177595	0.2224305	29.08235	32.56837
0.3243243	0.9226167	-0.01682609	-0.5906549	-23.50314	-24.65436
0.3063063	-1.795168	0.1234073	0.01928346	5.004500	5.164195

MATRICE RQ A LA 1 IEME ITERATION

8.535869	18.40427	-7.353181	8.620757	-25591.97	-25770.69
-0.2731887	0.8797483	-0.4028530	3.445521	1293.857	2238.528
0.5102024	1.714092	3.260751	3.459172	-1328.113	-1764.186
0.01027077	-1.531631	-0.5566603	8.374813	575.6724	627.6260
0.0004464691	0.003366308	-0.0001369071	-0.001266795	-0.05373883	-0.05630386
0.0001502385	-0.0008805024	6.052939'-05	9.458244'-06	-0.002454631	0.002532959

(On comparera la différence avec le QR normal (voir plus loin à l'utilisation du semi simple avec un seul bloc).

Sachant que les valeurs propres sont

$\lambda_1 = 6$ $\lambda_4 = 3$

$\lambda_2 = 5$ $\lambda_5 = 2$

$\lambda_3 = 4$ $\lambda_6 = 1$

Nous obtenons à la 50ème itération

MATRICE RQ A LA 49 IEME ITERATION

5.998000	-0.6825934	525.9465	181.2050	-355.2788	-70.19797
-0.0007403331	4.999195	-99.54625	-93.89142	101.2977	-1.193489
1.889871'-09	2.265623'-06	4.069061	-3.445836	0.7511544	-1.414997
-7.713863'-17	-9.404131'-14	1.156676'-08	2.889219	-0.6846454	0.5825097
-3.331211'-23	-4.138311'-20	2.298376'-14	5.346305'-07	1.952974	0.3698521
-2.627764'-33	-3.037927'-32	-1.295789'-25	-1.184902'-17	2.333687'-11	1.091168

MATRICE R

5.997259	-0.6831266	525.8938	181.1943	-355.2473	-70.18916
0	4.999729	-99.49361	-93.88066	101.2663	-1.202303
0	0	4.068802	-3.423131	0.7077095	-1.423305
0	0	0	2.866460	-0.7424263	0.5777591
0	0	0	0	2.054064	0.4074581
0	0	0	0	0	1.066659

MATRICE Q

1.000123	0.0001234359	0.0001260661	0.0001596965	-0.0003565720	0.0001573573
-0.0001234952	0.9998762	-7.500384'-06	-1.596965'-05	7.428585'-06	-1.072891'-05
3.151224'-10	4.231921'-07	1.000074	-0.007817477	0.01827725	0.005140040
-1.286231'-17	-1.681104'-14	2.326099'-09	1.007939	0.03099966	-0.01168831
-5.554555'-24	-8.277826'-21	5.648575'-15	1.865125'-07	0.9507856	-0.01645631
-4.381607'-35	-6.076780'-33	-3.184708'-26	-4.133679'-18	1.136131'-11	1.022977

MATRICE RQ A LA 50 IEME ITERATION

5.998060	-0.6820633	525.9333	178.5226	-322.5371	-65.36960
-0.0006174739	4.999063	-99.50104	-93.84827	91.55388	-2.310546
1.282170'-09	1.643949'-06	4.069104	-3.482114	0.6411306	-1.406729
-3.686928'-17	-5.392107'-14	8.106691'-09	2.889216	-0.6170290	0.5697477
-1.140941'-25	-1.700318'-20	1.160253'-14	3.831085'-07	1.952973	0.3830179
-4.673680'-36	-6.481849'-33	-3.356997'-26	-4.409225'-18	1.211664'-11	1.091167

002.53 SECONDS IN EXECUTION

Il est à remarquer que les résultats sont moins précis que ce que nous obtiendrons avec le même nombre d'itérations dans le cas semi simple.

2°) Nous utilisons le produit scalaire à 3 signes plus

MATRICE INITIALE

2.000000	4.000000	0	0	0	0	0
-5.000000	13.00000	-2.000000	0	0	0	0
-13.00000	29.00000	-15.00000	5.000000	0	0	0
-25.00000	61.00000	-48.00000	18.00000	0	0	0
-34.00000	80.00000	-38.00000	-26.00000	32.00000	-6.000000	0
-34.00000	24.00000	140.0000	-250.0000	155.0000	-29.00000	0

MATRICE R

-111.0000	184.5631	92.41649	-348.9619	247.6006	-46.34220	0
0	26.43689	-94.72682	122.3731	-67.93466	12.70633	0
0	0	39.31033	-51.84137	28.73300	-5.373348	0
0	0	0	25.43018	-21.53084	4.027352	0
0	0	0	0	0.1318817	-0.2268542	0
0	0	0	0	0	0.2097519	0

MATRICE Q

-0.0180180	0.2770923	0.7100734	-0.1331123	0.1280299	0.1180935
0.04504504	0.1772654	0.2703337	0.3162997	-0.5266111	-0.5021808
0.1171171	0.2793258	0.01618122	0.4925760	-0.8967878	0.8820828
0.2252252	0.7350239	0.02065489	0.3035226	0.8286788	0.8336305
0.3243243	0.7618788	0.1067772	-0.02049512	-0.4109684	-0.4167803
0.3063063	-1.230594	-0.1240656	0.04120204	0.08318865	0.08431357

MATRICE RQ A LA -1 IEME ITERATION

0.649949	16.94545	-2.439949	5.772582	-423.3843	-422.2808
-0.4926021	0.7796745	-0.6873798	0.7606887	-31.53667	-34.56610
0.6008501	1.379157	3.299587	2.818003	-19.97252	-20.99996
-0.02185535	-2.668108	-2.273399	-8.325645	30.26202	30.51253
-0.02672663	0.3796902	-0.04223172	-0.01205143	-0.07307422	-0.07409590
0.06424832	-0.2581173	-0.02602295	0.008642204	0.01744898	0.01768493

A la 50ème itération, nous obtenons des résultats plus précis que dans le cas précédent, en un temps moindre.

MATRICE PQ A LA 49 IEME ITERATION

5.998900	-0.6260322	691.1755	165.7691	895.6477	914.1321
-0.0007339118	5.900278	-143.1432	5.656558	-361.9805	-371.3665
8.435275'-10	1.018107'-06	4.001452	1.784503	-3.169604	-3.296487
6.312313'-16	7.466464'-13	-6.037768'-07	2.998596	-3.413057	-3.551167
-1.939227'-22	-2.418923'-[illegible]	[illegible].456060'-13	-3.430856'-07	2.001365	1.028407
1.721076'-34	-1.957337'-31	-1.907403'-24	-3.995468'-17	-1.193320'-10	0.9986182

MATRICE R

5.998166	-0.6265674	691.1082	169.7477	895.5823	914.0657
0	5.090313	-143.0761	5.678020	-361.9150	-371.2998
0	0	4.001465	1.815526	-3.002892	-3.126321
0	0	0	2.967529	-3.322541	-3.458707
0	0	C	0	1.743891	0.08985269
0	0	0	0	0	1.673885

MATRICE Q

1.000122	0.0001223126	-0.0001830334	-5.769641'-05	0.0006999881	0.0004375579
-0.0001223560	0.9998775	-7.626601'-06	6.427395'-06	-0.0004199930	-0.0004375579
1.406309'-10	2.036059'-07	1.000004	-0.01045673	-0.1154718	-0.1170160
1.002526'-16	1.493175'-13	-1.508836'-07	1.010468	-0.03196048	-0.03189159
-3.233033'-23	-4.837264'-20	6.222697'-14	-1.156146'-07	1.147642	-0.5527786
2.569337'-35	3.994384'-32	4.766774'-25	-1.346395'-17	-6.842867'-11	0.5965870

MATRICE PQ A LA 50 IEME ITERATION

5.998974	-0.6256162	691.1113	164.2972	942.5835	954.0967
-0.0006118694	5.000170	-143.0767	7.233640	-399.0110	-405.0125
5.627294'-10	8.147218'-07	4.001479	1.792689	-3.966326	-4.051190
2.975023'-16	4.431042'-13	-4.477516'-07	2.998594	-3.907930	-3.994687
-5.638057'-23	-8.435655'-20	1.085170'-13	-2.016192'-07	2.001362	1.017590
4.802940'-35	6.686137'-32	7.979034'-25	-2.253711'-17	-1.145417'-10	0.9986182

002.38 SECONDS IN EXECUTION

3°) Nous avons utilisé la même matrice avec 2 signes plus dans le produit scalaire

MATRICE INITIALE

2.000000	4.000000	0	0	0	0
-5.000000	13.00000	-2.000000	0	0	0
-13.00000	29.00000	-15.00000	5.000000	0	0
-25.00000	61.00000	-48.00000	18.00000	0	0
-36.00000	80.00000	-38.00000	-26.00000	32.00000	-6.000000
-34.00000	24.00000	140.0000	-250.0000	155.0000	-29.00000

MATRICE R

-111.0000	191.1877	65.24997	-307.8120	221.5859	-41.47406
0	19.81223	-70.89767	93.40001	-52.36197	9.794215
0	0	38.64771	-51.58006	28.76175	-5.378928
0	0	0	12.99206	-10.64894	2.002662
0	0	0	0	-0.3368206	0.04732326
0	0	0	0	0	0.008788079

MATRICE Q

-0.01801801	0.3757691	0.7216181	-0.2633830	-0.3230458	-0.3820414
0.04504504	0.2214763	0.2738270	0.5621533	0.8129576	0.8688466
0.1171171	0.3335639	0.01393459	0.8169550	0.5538079	0.3399826
0.2252252	0.9054862	0.01552501	0.2736573	0.07737935	0.4870231
0.3243243	0.9081849	0.1016552	-0.4425907	-0.1536205	-0.3969628
0.3063063	-1.744478	-0.1265571	0.05319996	0.03248183	0.07987005

MATRICE RQ A LA I IEME ITERATION

8.557543	18.60458	-3.786854	8.773135	170.4312	-9.122272
-0.3570882	0.6713409	-0.6751661	2.472849	-7.567961	60.16576
0.5897112	1.690842	3.342280	4.442318	12.81904	-23.82806
0.08585715	-1.400672	-1.134268	8.375036	2.706263	10.71462
-0.09474367	-0.3884497	-0.04022865	0.1515912	0.05327969	0.1374849
0.002691044	-0.01533061	-0.001112194	0.0004675253	0.0002854527	0.0007019041

et au bout de 50 itérations :

```
 MATRICE RQ A LA  49  IEME ITERATION

      6.000595      -0.09954113       765.0808       307.4575      -4535.887       1911.959
-0.0009959918          4.992622       -201.6391       -105.3853       2757.300       -1049.567
 7.999366'-10     7.168751'-07          4.006072      -0.4597455       57.90680       -19.71259
-1.001935'-15    -9.242581'-13     1.057731'-06          2.999124       -44.88268       17.85425
 1.835236'-23     1.700695'-20    -2.469560'-14     -1.946512'-08          2.001910      -0.3138698
-1.474705'-38    -1.269726'-35    -1.724142'-28     -2.089136'-21     -1.099241'-13       0.9589157


 MATRICE R

      5.999599      -0.1003531       764.9873       307.4236      -4535.586       1911.816
             0          4.993433       -201.5455       -105.3517       2757.005       -1049.423
             0                 0          4.005554      -0.4792192       58.19626       -19.83437
             0                 0                 0          3.018937       -43.26822       17.19926
             0                 0                 0                 0      0.09320068      -0.3270310
             0                 0                 0                 0               0       1.788303

 MATRICE Q

      1.000165      0.0001659426     6.095052'-05     0.0003234788      -0.04191224      -0.009692974
-0.0001660097         0.9998342    -7.618815'-06     -1.516307'-05                0      -0.0002730414
 1.333316'-10     1.433662'-07          1.000136      0.006477140      -0.1879502      -0.02698845
-1.670003'-16    -1.850980'-13     2.640566'-07          0.9934369       -20.36951       -3.295620
 3.058931'-24     3.405923'-21    -6.165915'-15     -6.447671'-09       21.47955       3.752499
-2.458006'-39    -2.542839'-36    -4.304390'-29     -6.920103'-22     -1.179433'-12       0.5585851

 MATRICE RQ A LA  50  IEME ITERATION

      6.000609      -0.09923095       765.0518       310.3625      -103828.3      -16985.71
-0.0008289851          4.992575       -201.5731       -105.9658       61403.07       10112.09
 5.340672'-10     5.750624'-07          4.006099      -0.4501297       1259.038       208.7733
-5.041635'-16    -5.587992'-13     7.971705'-07          2.999123       -990.8760      -162.7059
 2.850945'-25     3.174342'-22    -5.746674'-16     -6.009273'-10          2.001908       0.1670608
-4.395657'-39    -4.947367'-36    -7.697554'-29     -1.237524'-21     -2.109184'-12       0.9989196


 901.85 SECONDS IN EXECUTION
```

4°) Enfin, avec un seul signe plus

MATRICE INITIALE

2.000000	4.000000	0	0	0	0
-5.000000	13.00000	-2.000000	0	0	0
-13.00000	29.00000	-15.00000	5.000000	0	0
-25.00000	61.00000	-48.00000	18.00000	0	0
-36.00000	80.00000	-38.00000	-26.00000	32.00000	-6.000000
-34.00000	24.00000	140.0000	-250.0000	155.0000	-29.00000

MATRICE R

-111.0000	192.6786	-67.51056	-303.1011	218.1946	-40.83931
0	18.32138	-64.65555	85.78712	-48.28329	9.031410
0	0	34.14496	-53.60234	32.29541	-6.041048
0	0	0	17.51629	-15.08203	2.828489
0	0	0	0	-0.1247673	0.06030002
0	0	0	0	0	-0.03984180

MATRICE Q

-0.01801801	0.4078123	0.8078411	0.1594005	0.5091265	0.5095963
0.04504504	0.2358328	0.2989277	0.5271736	1.161723	1.144901
-0.1171171	0.3511772	-0.005885293	0.5612650	-0.4582505	-0.3971258
0.2252252	0.9608406	-0.03167143	0.1194767	-0.5964013	-0.6774788
0.3243243	0.9556945	0.05551707	-0.3743750	0.4891915	0.5344069
0.3063063	-1.911354	-0.1247194	0.007034801	-0.1051762	-0.1137463

MATRICE RO A LA 1 IEME ITERATION

8.576356	19.23524	-5.664322	3.586833	428.1934	463.7727
-0.3186398	0.6366882	-0.5663980	1.757534	-24.82040	-38.29660
0.5501394	2.898769	4.042954	0.6277476	32.75554	40.70059
0.01011425	-2.605371	-1.757511	7.806813	-18.36078	-20.51956
-0.02193430	-0.2344940	-0.01447330	0.04713396	-0.06737727	-0.07353538
-0.01220379	0.07615173	-0.004969046	-0.0002802790	0.004190408	0.004531857

En 50 itérations, nous obtenons :

MATRICE RO A LA 49 IEME ITERATION

6.000190	0.1925567	959.8438	-57.96977	-37.34634	-37.28209
-0.001462315	4.999351	-320.0081	378.3254	-6.844204	-6.837651
6.335366'-10	4.147074'-07	4.000254	8.553572	-0.6021505	-0.6013778
9.122959'-17	-5.691227'-14	-1.130624'-07	2.999487	-0.04116746	-0.04106294
-2.331864'-22	-1.461394'-19	3.658685'-13	-2.726214'-06	1.999900	0.9982209
-8.904832'-35	-5.190823'-32	-1.217612'-24	-1.358070'-16	-5.116689'-11	0.9999999

MATRICE R

5.998727	0.1937270	959.5322	-57.86348	-37.33891	-37.27467
0	4.998178	-319.6960	378.2190	-6.851638	-6.845072
0	0	3.999756	8.543351	-0.5966785	-0.5959145
0	0	0	3.039168	0.01538400	0.01531739
0	0	0	0	2.020242	1.011307
0	0	0	0	0	1.007241

MATRICE Q

1.000243	-0.0002437525	0.0001220777	-0.0003614912	1.510590'-05	1.514909'-05
-0.0002437709	1.000243	-0.0001220777	0.0006426510	-4.295741'-05	-4.260681'-05
-1.140134'-10	8.296723'-08	1.000131	0.01285710	-0.002767685	-0.002762815
1.520915'-17	1.138600'-14	-2.326642'-08	0.9969433	0.01286199	0.01284510
-3.837264'-23	-2.923703'-20	3.247041'-14	-8.970263'-07	[illegible]	-0.002[illegible]1641
-1.494461'-35	-1.038435'-32	-3.044222'-25	-4.468559'-17	2.532710'-11	0.9928107

MATRICE RO A LA 50 IEME ITERATION

6.000137	0.1923923	959.6580	-44.77316	-40.36276	-40.29327
-0.001219447	4.999367	-319.7383	369.1733	-1.033399	-1.034806
4.560259'-10	3.318487'-07	4.000277	8.483228	-0.4918561	-0.4912214
4.422911'-17	3.469398'-14	-8.596638'-08	2.999486	0.05431883	0.05420136
-7.953213'-23	-5.906581'-20	1.868125'-13	-1.812209'-06	1.999699	0.9982144
-1.495210'-35	-1.046004'-32	-3.066266'-25	4.509916'-17	2.551050'-11	0.9999996

001.65 SECONDS IN EXECUTION

5°) Conclusions

Sans prétendre à une étude exhaustive, nous voyons que cet algorithme peut donner des résultats de l'ordre de ceux fournis par le QR ; là aussi, se pose le problème des classes "optimales".

Il est néanmoins à remarquer que cet algorithme est de conception différente des ordres algorithmes associés strictement à une décomposition.

§2) L'ALGORITHME SYMPLECTIQUE

A - INTRODUCTION

Nous ne discuterons que le cas de l'algorithme symplectique normalisé ; nous n'avons pas programmé l'algorithme d'élimination symplectique.

UNE REMARQUE S'IMPOSE

On ne peut pas utiliser la décomposition symplectique directe ; en effet, nous avons vu dans la remarque c) 1ère partie, qu'il était capital dans la démonstration de conserver $T^{+}(n,\mathbb{R})$ comme deuxième facteur de la décomposition et non pas un sous groupe de celui-ci. Or, la décomposition "directe" symplectique conduit à un sous groupe donc nous ne pouvons pas l'utiliser.

D'autre part, il faut remarquer que la condition de normalisation que nous imposons, à savoir Se = e, qui a pour effet de supprimer 2n paramètres, est une condition qui n'est pas "normale" vis à vis de la géométrie du groupe symplectique, car il apparaît que dans le cas de l'élimination symplectique cette normalisation n'intervient pas, donc :

> Il faudra pour utiliser de manière performante cet algorithme construire des normalisations plus naturelles.

B - LE RESULTAT THEORIQUE

Enonçons le théorème de Rutishauser dans ce cadre symplectique :

On prend $G = P.\ NSp(2n,\mathbb{R})\ P^t$

THEOREME

> Soit $A \in G\ell(2n,\mathbb{R})$
>
> Si A vérifie les conditions de Rutishauser
> Si l'algorithme GR est constructible pour A ($G=P\ NSp(2n,\mathbb{R})P^t$)
>
> Alors la suite des matrices (A_i) générées par l'algorithme GR converge vers une matrice triangulaire supérieure ayant sur la diagonale les valeurs propres de A.

C - LES EXTENSIONS A PREVOIR

Nous avons déjà donné deux directions :

.) chercher des conditions de normalisation plus naturelles
.) utiliser l'élimination symplectique déjà décrite.

Nous allons donner une autre façon d'effectuer l'élimination symplectique mais sans développer le calcul :

Nous avons utilisé pour effectuer l'élimination une famille de générateurs, mais comme dans le cas du groupe orthogonal, on peut prévoir d'autres générateurs et de ce fait on peut penser à utiliser le résultat suivant.

THEOREME (Dieudonné [2] Partie II Chapitre II

> Toute transformation symplectique est un produit de transvections symplectiques.

Donc, si nous pouvons construire matriciellement une transvection symplectique, nous obtenons un système de générateurs.

Chercher les transvections symplectiques, revient à se poser le problème :

Quelles sont les matrices de la forme $I+uv^t$ appartenant à $Sp(2n,\mathbb{R})$ $(u,v \in \mathbb{R}^n)$

On doit avoir $(I+uv^t)^t J (I+uv^t) = J$ ce qui en développant donne

$$vu^tJ + J uv^t + v\underbrace{(u^tJu)}_{=0} v^t = 0$$

donc $vu^tJ = -J uv^t$

Si on remarque alors que $J^t = -J = J^{-1}$, cela donne (u et $v \neq 0$)

$$v = Ju$$

donc

LEMME

Les transvections symplectiques sont de la forme $I+u u^t J^t$

Les transvections symplectiques étant connues, il ne nous reste plus qu'à guider une élimination comme nous l'avons fait avec les générateurs dans le paragraphe 7 du chapitre 3 de la deuxième partie.

Il est évident que ces algorithmes d'élimination symplectique peuvent être comparés aux algorithmes du type Gauss d'élimination classique.

D - LES RESULTATS NUMERIQUES

Il s'agit là, bien sur, que de résultats très partiels, nous donnons trois exemples que nous avons traités avec l'algorithme symplectique normalisé.

1°) Cas de petites valeurs propres

On considère

MATRICE INITIALE

0.6700000	0.1300000	0.1199999	0.1100000
0.1300000	0.9600000	0.1400000	0.1300000
0.1199999	0.1400000	0.3099999	0.1600000
0.1100000	0.1300000	0.1600000	0.1500000

qui admet pour valeurs propres

$$\lambda_1 = 0{,}0479716838$$
$$\lambda_2 = 0{,}3111488671$$
$$\lambda_3 = 0{,}6384911230$$
$$\lambda_4 = 1{,}0923883260$$

On obtient alors au bout de 50 itérations

MATRICE A. ITERATION I= 50

1.092352	1.027241	0.3886607	0.2218412
1.166090'-12	0.6384747	-0.01933365	-0.1778983
7.140743'-28	-1.036268'-16	0.3111455	0.1649154
4.226275'-68	-3.075128'-57	1.033053'-41	0.04796838

MATRICE SCHAPEAU

1.000000	0	1.915651'-07	1.248746'-06
1.067504'-12	0.9999999	-1.197282'-08	-9.536743'-07
6.537036'-28	-1.023037'-16	1.000000	-9.536743'-07
3.868968'-68	-9.511930'-57	3.336230'-41	1.000000

MATRICE R

1.092352	1.027240	0.3886604	0.2218411
0	0.6384747	-0.01933365	-0.1778982
0	0	0.3111455	0.1649154
0	0	0	0.04796835

000.84 SECONDS IN EXECUTION

2°) Nous avons testé le cas de la matrice

MATRICE INITIALE

5.000000	-5.000000	5.000000	0
-5.000000	10.00000	-5.000000	7.000000
5.000000	-5.000000	15.00000	7.000000
0	7.000000	7.000000	21.00000

qui admet deux racines doubles

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2{,}65728073$$

$$\text{et} \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 26{,}34271928$$

MATRICE A. ITERATION I= 5[illegible]

26.34160	-1.722076'-06	-21.44123	-23.92668
-5.137720'-06	26.34167	78.09415	100.8263
2.574[illegible]3'-47	5.000517'-40	2.657201	-6.570481'-06
0	5.[illegible]2[illegible]5'-48	7.100757'-07	2.657178

MATRICE [illegible]

1.000000	5.001073'-07	-5.799408'-06	-1.087437'-05
-1.959405'-07	0.999999	5.742431'-06	0
9.[illegible]123[illegible]7'-[illegible]	[illegible]5'-4[illegible]	1.000000	-0.0001703198
0	2.[illegible]1722'-4[illegible]	2.672270'-07	1.000158

MATRICE R

26.34164	-1.721483'-05	-21.44130	-23.92670
0	26.34167	78.09412	100.8222
0	0	2.657200	0.0004459233
0	0	0	2.656730

000.54 SECONDS IN EXECUTION

3°) Donnons enfin l'exemple que nous avons traité dans tous les autres algorithmes

MATRICE INITIALE

MATRICE A, ITERATION I= 1

2.000000	4.000000	0	0	0	0
-5.000000	13.00000	-2.000000	0	0	0
-13.00000	29.00000	-15.00000	5.000000	0	0
-25.00000	61.00000	-48.00000	18.00000	0	0
-36.00000	80.00000	-38.00000	-26.00000	32.00000	-6.000000
-34.00000	24.00000	140.0000	-250.0000	155.0000	-29.00000

MATRICE SCHAPEAU

-0.01801801	-0.4902103	0.7725334	-2.431652	0.1344653	3.114590
0.04504504	-0.1665146	0.2812166	0.2327127	0.02170774	1.424942
0.1171171	-0.1424255	-0.03469697	1.586341	0.3302197	-2.297119
0.2252252	-0.5904799	-0.1200929	1.193233	0.3056253	0.8696289
0.3243243	-0.3757858	-0.02116217	0.02774834	0.03559701	-0.3678741
0.3063063	2.765414	0.1222025	0.3815918	0.1723849	-1.742188

MATRICE P

-111.0000	227.5224	-51.43535	-166.2359	146.7400	-27.49025
0	-16.52251	54.83780	-72.13509	40.46844	-7.567566
0	0	33.59761	-23.07265	6.359944	-1.194648
0	0	0	8.443728	-7.190617	1.346517
0	0	0	0	0.6220837	-0.09623635
0	0	0	0	0	0.001996041

et l'on trouve au bout de 50 itérations

MATRICE A, ITERATION I= 50

5.998167	19.06143	-3.374098	224.1624	-17.43373	1340.128
6.636532E-05	5.002887	-0.1253058	12.27634	-4.046125	-74.98471
-7.872439E-08	0.001046975	3.997931	123.6133	-58.55925	-1589.058
-4.561082E-15	5.241113E-12	-4.930975E-09	3.000074	-0.3165235	-58.87137
2.769787E-21	-3.807354E-17	3.824938E-14	-6.479361E-06	1.999829	-191.7270
1.994964E-41	-2.550437E-36	-2.369899E-32	6.117378E-23	9.702860E-18	1.000181

MATRICE SCHAPEAU

0.9999892	-0.0002174377	-1.565038E-06	0.0004047374	-4.781266E-05	0.002050903
1.106414E-05	1.000010	-4.472641E-08	6.675720E-06	-3.236360E-06	-0.0003930901
-1.312459E-08	0.0002093353	1.000002	-0.0002765874	-0.0002689073	-0.06916779
-7.604044E-17	1.247858E-12	-1.233337E-09	1.000001	-2.355345E-06	-0.0004730225
4.617671E-22	-7.612476E-18	9.567007E-15	-2.159735E-06	1.000322	0.09599048
3.325920E-41	-5.099469E-37	-5.927801E-33	2.039077E-23	4.853414E-18	0.9800763

MATRICE P

5.998232	19.06271	-3.374155	224.1665	-17.43466	1340.137
0	5.002621	-0.1252670	12.27373	-4.045886	-74.99869
0	0	3.997950	123.6112	-58.55783	-1589.036
0	0	0	3.000071	-0.3165185	-58.87128
0	0	0	0	1.999184	-191.7632
0	0	0	0	0	1.020514

022.31 SECONDS IN EXECUTION

Ce qui montre la convergence de la méthode ; les résultats étant moins bons que pour le QR, mais nous avons déjà dit que :

.) la normalisation employée n'est sûrement pas optimale

.) l'algorithme que nous avons utilisé n'a pas été optimisé.

§3) LES ALGORITHMES SEMI SIMPLES

A - INTRODUCTION

Nous avons programmé l'algorithme Σ_1 de manière "grossière", c'est-à-dire sans chercher à minimiser les calculs qui sont à effectuer notamment dans les inversions de matrices rencontrées.

Nous avons aussi programmé l'algorithme bloc triangulaire uniquement dans le cas où les blocs sont des matrices orthogonales.

B - L'ALGORITHME Σ

D'après les résultats théoriques obtenus dans la deuxième partie Chapitre IV, nous pouvons appliquer le théorème de Rutishauser généralisé en prenant

$$G = \Sigma(2n, \mathbb{R})$$

on a

THEOREME

Soit $A \in G\ell(2n, \mathbb{R})$
Si A vérifie les conditions de Rutishauser
Si l'algorithme $\Sigma(2n, \mathbb{R}).T^+(2n, \mathbb{R})$ est constructible pour A

Alors la suite des matrices (A_i) générée par l'algorithme converge vers une matrice triangulaire supérieure ayant sur la diagonale les valeurs propres de A.

C - LES RESULTATS NUMERIQUES DU Σ-ALGORITHME

Une remarque s'impose immédiatement : c'est la grande ressemblance entre le comportement de cet algorithme et le comportement de l'algorithme LR ; cela n'a rien de surprenant compte tenu de la manière dont est construit cet algorithme à partir justement du LR.

On rencontre en particulier dans les itérations successives le phénomène de pivotement des valeurs sur la diagonale caractéristique du LR.

PREMIER EXEMPLE

Nous avons testé le ΣR sur la matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & -3 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont :

$$\lambda_1 = 4$$
$$\lambda_2 = 3$$
$$\lambda_3 = 2$$
$$\lambda_4 = 1$$

On trouve au bout de 13 itérations la matrice

4,061875	-5,135451	-7,034539	9,462451
0,01279318	2,965382	1,564795	1,889682
$-0{,}7\ 10^{-5}$	-0,009870663	0,9728976	1,643391
$-\ 4\ 10^{-5}$	-0,006000940	-0,01646641	1,999667

qui montre l'apparition désordonnée des valeurs propres sur la diagonale.

Et finalement au bout de 32 itérations la matrice

$$\begin{pmatrix} 3{,}999846 & -11{,}40717 & -7{,}444064 & 8{,}277313 \\ 1\ 10^{-5} & 2{,}999833 & 2{,}722345 & 0{,}7095920 \\ 0 & -\ 3\ 10^{-6} & 2{,}000005 & 0{,}6587775 \\ 0 & 0 & -7\ 10^{-5} & 0{,}9998727 \end{pmatrix}$$

DEUXIEME EXEMPLE

On a considéré la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 13 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -13 & 29 & -15 & 5 & 0 & 0 \\ -25 & 61 & -48 & 18 & 0 & 0 \\ -36 & 80 & -38 & -26 & 32 & -6 \\ -34 & 24 & 140 & -250 & 155 & -29 \end{pmatrix}$$

Dont les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = 6$$
$$\lambda_2 = 5$$
$$\lambda_3 = 4$$
$$\lambda_4 = 3$$
$$\lambda_5 = 2$$
$$\lambda_6 = 1$$

Après avoir observé les phénomènes de pivotement habituels, on obtient au bout de 60 itérations les valeurs propres sur la diagonale, dans l'ordre

$$\lambda_1 = 5{,}998864$$
$$\lambda_2 = 5{,}001627$$
$$\lambda_3 = 3{,}998156$$
$$\lambda_4 = 3{,}000073$$
$$\lambda_5 = 1{,}999848$$
$$\lambda_6 = 0{,}9999295$$

Les valeurs des éléments sans diagonaux étant toutes de l'ordre de 10^{-9} sauf

$$\begin{cases} a_{21} = 0{,}0002510443 \\ a_{32} = 0{,}004406642 \end{cases}$$

D - L'ALGORITHME TRIANGULAIRE INFERIEUR PAR BLOCS

a) Le théorème de convergence

Comme nous l'avons indiqué, nous n'avons étudié que le cas où les blocs diagonaux sont unitaires.

Nous avons le théorème de décomposition : $G\ell(n,\mathbb{R}) = \overline{B.T^{+}(n,\mathbb{R})}$;
B groupe des matrices du type $B_{p_1,\ldots,p_q}$ (terminologie du chapitre précédent).

Comme ces décompositions sont évidemment continues, on peut citer le :

THEOREME

> Si $A \in G\ell(n,\mathbb{R})$
> Si A vérifie les conditions de Rutishauser
> Si l'algorithme GR est constructible pour A ($G = B$)
> Alors la suite (A_i) générée par l'algorithme GR converge vers une matrice triangulaire supérieure ayant les valeurs propres sur la diagonale.

b) Les résultats numériques

PREMIER EXEMPLE

Nous considérons la matrice 6 x 6 suivante :

-2.000000	4.000000	0	0	0	0
-5.000000	13.00000	-2.000000	0	0	0
-13.00000	29.00000	-15.00000	5.000000	0	0
-25.00000	61.00000	-48.00000	18.00000	0	0
-36.00000	80.00000	-38.00000	-26.00000	32.00000	-6.000000
-34.00000	24.00000	140.0000	-250.0000	155.0000	-29.00000

dont les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = 6 \qquad \lambda_4 = 3$$
$$\lambda_2 = 5 \qquad \lambda_5 = 2$$
$$\lambda_3 = 4 \qquad \lambda_6 = 1$$

La décomposition QR normale donne

MATRICE Q

0.03494816	0.1684241	-0.5187101	-0.1440281	0.3234093	0.2880864
-0.08737040	0.09866726	0.3348446	0.5136061	-0.7328656	-0.5928265
-0.2271030	0.1480702	-0.04031784	0.6863894	0.2857905	0.05585740
-0.4368520	0.4029493	-0.1410044	0.1741306	0.4041293	0.6086392
-0.6290069	0.4630875	-0.02253732	-0.4623693	-0.3293959	-0.4290071
-0.5941167	-0.7842999	0.1477728	0.01508437	0.06940252	0.08918828

MATRICE R

57.22762	-58.31589	-34.72099	155.8862	-112.2185	21.00383
0	44.25394	-146.8792	193.5881	-108.6676	20.32616
0	0	28.24768	-39.09688	22.18356	-4.150187
0	0	0	14.81762	-12.45774	2.336769
0	0	0	0	0.1532470	-0.03629780
0	0	0	0	0	0.01269352

et l'on obtient au bout de 60 itérations les matrices $A_{60} = Q_{60}\ R_{60}$ suivantes

MATRICE A-ITERATION I= 60

5.999619	0.8781839	-11.75714	52.62491	169.4805	102.5894
0.0002188053	4.999969	-5.476503	39.11230	154.6593	115.3875
-6.616256'-13	2.079932'-06	4.001575	8.026868	51.01106	74.87851
-3.080738'-18	1.263741'-14	-3.935591'-09	2.998335	4.293914	38.93042
-2.492726'-26	-1.043503'-22	-4.083143'-17	8.624014'-09	1.999807	-8.760187
-3.777970'-47	1.471256'-43	5.338160'-37	-1.696615'-27	2.018896'-19	1.000020

MATRICE Q

1.000000	-3.646659'-05	-9.389197'-08	2.637645'-06	1.320276'-06	-7.256499'-05
3.646988'-05	1.000000	-7.149739'-07	1.914055'-06	-1.133465'-06	-6.143579'-05
-1.102779'-10	5.360125'-07	1.000000	4.134885'-06	1.401015'-05	-7.480250'-05
-5.134890'-14	2.507605'-15	-9.836065'-10	1.000000	-0.0004768833	-0.004978471
-4.154807'-27	-2.087108'-23	-1.020380'-17	2.876268'-09	1.000000	0.01750813
-6.297016'-48	2.942740'-44	1.334015'-37	-5.658525'-28	1.009546'-19	0.9998350

MATRICE R

5.999619	0.8783662	-11.75734	52.62633	169.4861	102.5936
0	4.999935	-5.476071	39.11038	154.6531	115.3838
0	0	4.001576	8.026834	51.01093	74.87842
0	0	0	2.998334	4.294868	38.93121
0	0	0	0	1.999806	-8.777649
0	0	0	0	0	1.000185

Si maintenant nous utilisons des matrices B du type décrit plus haut adaptées à la forme de A (c'est-à-dire un premier bloc diagonal 4x4 et un second 2x2), nous obtenons à la première décomposition :

MATRICE L

0.0697[illegible]	0.9560848	0.1183643	0.2589856	0	0
-0.1742690	0.1198754	0.6767934	-0.7050107	0	0
-0.4531515	-0.2121670	0.5854555	0.6379331	0	0
-0.8714433	0.1628404	-0.4303287	-0.1700823	0	0
-1.254881	-0.6211243	1.942051	-291.9724	0.2021877	-0.9797033
-1.185165	-6.213092	15.94667	-1404.370	0.9793468	0.2004539

MATRICE R

28.68797	-68.28644	48.97520	-17.95177	0	0
0	9.163026	-4.873588	1.870294	0	0
0	0	10.52029	-4.818639	0	0
0	0	0	0.1301752	0	0
0	0	0	0	158.2687	-29.61417
0	0	0	0	0	0.01263612

puis à la 60ème itération, la matrice A_{60} et sa décomposition

MATRICE A ITERATION I= 60

5.999643	2.235664	-14.99811	64.86917	0	0
0.0001424426	5.000013	-6.709448	59.02310	0	0
-2.603184'-10	1.019252'-06	4.000277	20.11946	0	0
-6.470908'-19	4.141222'-15	-2.107432'-09	2.999646	0	0
-4.938043'-25	3.174756'-21	-2.057820'-15	8.139647'-07	2.000011	-161.0047
-3.938104'-47	2.354860'-43	1.414884'-36	-8.475367'-27	1.069574'-20	0.9999090

MATRICE L

1.000000	-2.365132'-05	1.461856'-07	1.482354'-06	0	0
2.374190'-05	1.000000	0	0	0	0
-4.338901'-11	3.258723'-07	1.000000	-1.017372'-05	0	0
-1.078549'-19	3.282993'-16	-5.268199'-10	1.000000	0	0
-8.230565'-25	6.549930'-22	-5.144181'-16	2.713535'-07	1.000000	0
-6.563901'-48	4.710049'-44	3.536963'-37	-2.825455'-27	5.347839'-21	1.000000

MATRICE R

5.999639	2.235783	-14.99827	64.87056	0	0
0	4.999958	-6.709091	59.02156	0	0
0	0	4.000278	20.11946	0	0
0	0	0	2.999646	0	0
0	0	0	0	2.000011	-161.0047
0	0	0	0	0	0.9999090

On peut d'ailleurs remarquer que A_{80} donne une nette amélioration de ces résultats :

MATRICE A ITERATION I= 80

5.999927	2.235483	-14.99900	64.87943	0	0
3.713526'-08	4.999653	-6.707343	59.01463	0	0
-7.843216'-14	1.872016'-08	4.000278	20.11902	0	0
-6.159580'-23	1.512572'-19	-6.657937'-12	2.999646	0	0
-1.417059'-34	3.495784'-29	-1.959942'-21	2.453866'-10	2.000011	-161.0047
-1.075061'-52	2.408119'-57	1.282680'-48	-2.431970'-36	1.018039'-26	0.9999079

MATRICE Q

1.000000	-5.722446'-07	-5.884246'-09	1.123993'-06	0	0
6.189287'-07	1.000000	2.384020'-07	-1.598993'-06	0	0
-1.307219'-14	3.744297'-09	1.000000	0	0	0
-1.026609'-23	3.025359'-20	-1.664367'-12	1.000000	0	0
-2.361794'-35	6.992068'-30	-4.899512'-22	8.180516'-11	1.000000	0
-1.792791'-53	4.936589'-58	3.206476'-49	-8.107517'-37	5.090165'-27	1.000000

MATRICE R

5.999925	2.235486	-14.99901	64.87946	0	0
0	4.999650	-6.707335	59.01459	0	0
0	0	4.000278	20.11902	0	0
0	0	0	2.999646	0	0
0	0	0	0	2.000011	-161.0047
0	0	0	0	0	0.9999078

Nous avons refait la même décomposition avec *B* groupe des matrices dont le premier bloc diagonal est de dimension 2x2, le second de dimension 4x4.

Les résultats sont alors :

.) Pour la décomposition de A = A_1 (1ère étape)

MATRICE Q

0.3713907	0.9284768	0	0	0	0
-0.9284768	0.3713906	0	0	0	0
-2.414039	0.4036856	-0.05582540	-0.1340933	0.7599209	-0.2346445
-4.642384	1.388679	-0.2470552	-0.5128478	0.4569792	0.8154308
-6.685032	1.081879	-0.1596616	-0.8016388	-0.4523514	-0.5187348
-6.313642	-5.013771	0.8534879	-0.2763737	0.09523183	0.1045537

MATRICE R

5.385164	-10.58463	1.856953	0	0	0
0	8.541984	-0.7427813	0	0	0
0	0	155.2195	-238.9968	142.6814	-26.69316
0	0	0	80.03432	-68.49036	12.82467
0	0	0	0	0.2736690	-0.04761505
0	0	0	0	0	0.005123794

.) A la soixantième itération, nous obtenons :

MATRICE A ITERATION I= 60

5.999463	6.999815	-0.1170493	0.4812891	0.9555749	-0.1198984
6.369190'-05	5.000111	-0.1170619	0.4813364	0.9556464	-0.1199231
-4.441070'-09	6.177121'-05	4.000122	19.47940	104.3091	301.2913
-1.051182'-17	1.504293'-13	-2.008019'-09	2.999804	4.353597	167.0726
-6.539075'-26	9.400681'-22	-1.597140'-17	6.634778'-09	2.000010	-39.63554
-2.164881'-47	2.894669'-43	4.559304'-38	-2.875658'-28	4.452321'-20	0.9999090

MATRICE Q

1.000000	-1.049034'-05	0	0	0	0
1.061626'-05	1.000000	0	0	0	0
7.402445'-10	1.235519'-05	1.000000	0	0	0
-1.752127'-18	3.003820'-14	-5.019885'-10	1.000000	0	0
-1.089943'-26	1.880275'-22	-3.992721'-18	2.211737'-09	1.000000	0
-3.608457'-48	5.789799'-44	1.139791'-38	-9.586150'-29	2.226149'-20	1.000000

MATRICE R

5.999462	6.999867	-0.1170505	0.4812942	0.9555850	-0.1198997
0	5.000034	-0.1170606	0.4813313	0.9556363	-0.1199217
0	0	4.000122	19.47939	104.3091	301.2913
0	0	0	2.999804	4.353597	167.0726
0	0	0	0	2.000010	-39.63554
0	0	0	0	0	0.9999090

.) Enfin à la 80ème itération :

MATRICE A ITERATION I= 80

5.999876	6.999730	-0.1170560	0.4813183	0.9556336	-0.1199052
1.660948'-06	4.999630	-0.1170543	0.4813069	0.9555883	-0.1199153
-1.337400'-12	7.136704'-07	4.000122	19.47926	104.3089	301.2913
-1.001947'-23	5.500882'-18	-6.355569'-12	2.999804	4.353597	167.0726
-1.877026'-35	1.035243'-29	-1.522354'-23	1.998063'-12	2.000010	-39.63554
-5.914890'-63	3.034294'-57	4.136537'-50	-8.242909'-38	-4.237826'-26	0.9999079

MATRICE Q

1.000000	-1.907491'-07	0	0	0	0
2.768305'-07	1.000000	0	0	0	0
-2.229045'-13	1.427450'-07	1.000000	0	0	0
-1.669947'-24	1.100262'-18	-1.588843'-12	1.000000	0	0
-3.128440'-36	2.070655'-30	-3.805768'-24	6.660644'-13	1.000000	0
-9.858351'-64	6.069052'-58	1.034103'-50	-2.747815'-38	2.118902'-26	1.000000

MATRICE R

5.999875	6.999731	-0.1170560	0.4813184	0.9556339	-0.1199052
0	4.999627	-0.1170542	0.4813068	0.9555882	-0.1199152
0	0	4.000122	19.47926	104.3089	301.2913
0	0	0	2.999804	4.353597	167.0726
0	0	0	0	2.000010	-39.63554
0	0	0	0	0	0.9999078

REMARQUE FINALE SUR CET EXEMPLE

.) Les temps de calculs sont un peu plus élevés dans les algorithmes GR que dans l'algorithme *QR* tout en restant assez voisins.

.) Si maintenant nous comparons les résultats obtenus au bout de 60 itérations, sur la diagonale on n'observe pas de différences importantes, quoique l'algorithme bien adapté à la décomposition donne les résultats les meilleurs.

DEUXIEME EXEMPLE

Sur certains cas de divergence de l'algorithme

Il est relativement facile de comprendre comment cet algorithme peut ne pas converger, c'est-à-dire : les matrices A_i formées peuvent très bien ne pas converger vers une matrice triangulaire supérieure.

Considérons les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont

$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 3$
$\lambda_3 = 5$
$\lambda_4 = 7$

et la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont

$\mu_1 = 0{,}03801601$
$\mu_2 = 0{,}4538345$
$\mu_3 = 2{,}2034461$
$\mu_4 = 26{,}304703$

Nous avons alors construit la matrice 8x8 ayant A et B comme blocs diagonaux et des valeurs quelconques sous le premier bloc A ; on a ensuite appliqué à cette matrice l'algorithme semi simple avec *B* formé de matrices du type

$$B = \left(\begin{array}{c|c} Q_1 & 0 \\ \hline T & Q_2 \end{array}\right)$$

Q_1 et Q_2 orthogonales.

On obtient alors :

MATRICE A ITERATION I= 1

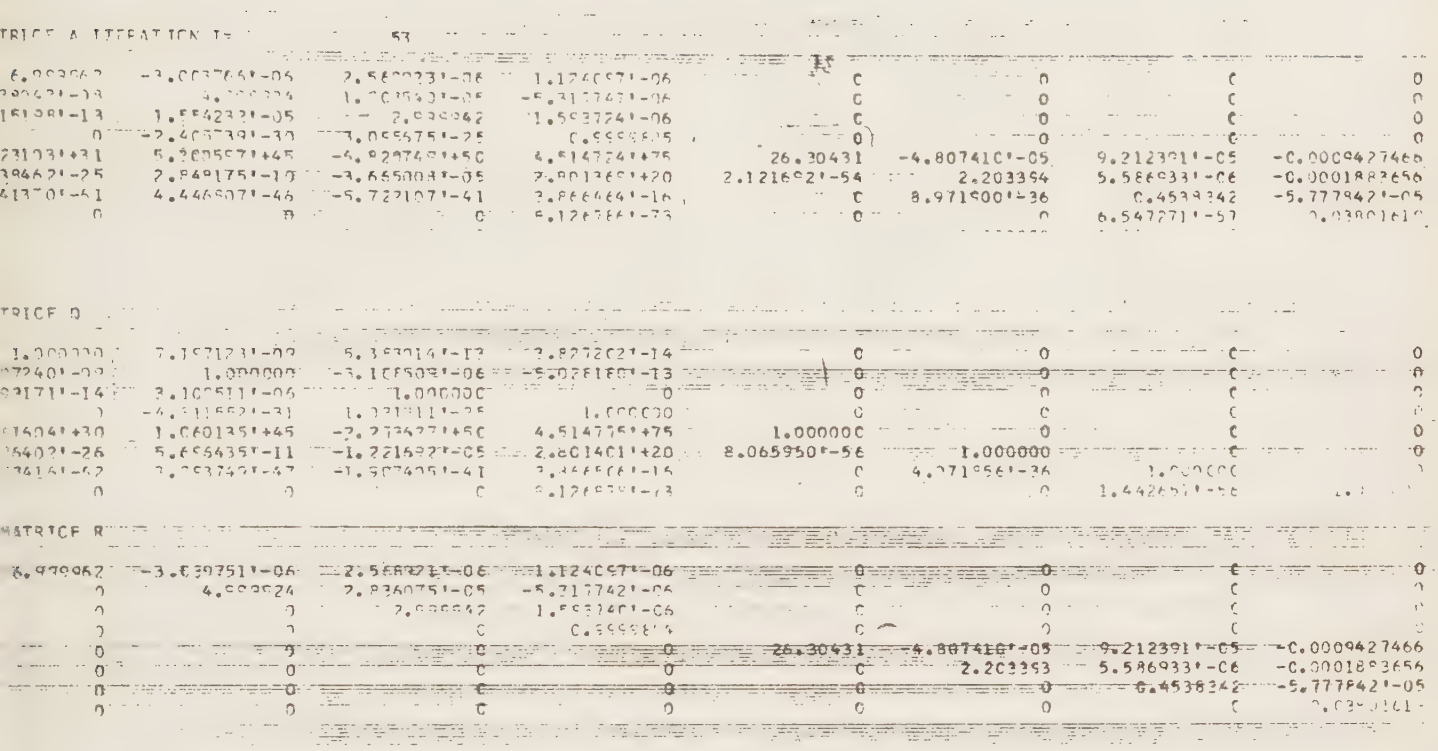
4.000000	-2.000000	-1.000000	0	0	0	0	0
-2.000000	4.000000	0	-1.000000	0	0	0	0
-1.000000	0	4.000000	-2.000000	0	0	0	0
0	-1.000000	-2.000000	4.000000	0	0	0	0
345.0000	12.00000	23.00000	45.00000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
6.000000	0	34.00000	56.00000	1.000000	2.000000	3.000000	4.000000
5.000000	67.00000	78.00000	0	1.000000	3.000000	6.000000	10.00000
0	9.000000	7.000000	3.000000	1.000000	4.000000	10.00000	20.00000

MATRICE Q

0.8728717	0.3529612	0.1958138	0.2315692	0	0	0	0
-0.4364359	0.8342726	-0.0914300	0.3343641	0	0	0	0
-0.2182179	-0.2566991	0.9228316	0.2575507	0	0	0	0
0	-0.3360176	-0.3356492	0.8743177	0	0	0	0
75.28517	92.60417	52.61130	179.0850	0.5000000	-0.6708204	0.4999990	-0.2236401
1.309307	1.540135	6.945501	49.21835	0.5000000	-0.2236068	-0.5000010	0.6708777
1.091089	23.85594	23.15710	67.98404	0.5000000	0.2236068	-0.4999990	-0.6707754
0	3.032258	2.187980	8.798211	0.5000000	0.6708204	0.5000010	0.2236477

MATRICE R

4.582575	-3.491486	-1.745743	0.8728716	0	0	0	0
0	2.968784	-0.7059216	-1.668543	0	0	0	0
0	0	4.177503	-3.744595	0	0	0	0
0	0	0	1.847801	0	0	0	0
0	0	0	0	2.000000	5.000000	10.00000	17.50000
0	0	0	0	0	2.236068	6.708203	14.07722
0	0	0	0	0	0	1.000000	3.500024
0	0	0	0	0	0	0	0.2236084

et au bout de 53 itérations (1.43 secondes), on obtient un dépassement de capacité à cause des éléments sous diagonaux.

L'"explication" de ce phénomène est d'ailleurs assez simple ; en effet, il faut remarquer que la matrice B a une valeur propre de module le plus grand à savoir $\mu_4 = 26{,}304703$ et son vecteur propre associé se décompose en

$$X_{\mu_4} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x' \end{vmatrix} \qquad x' \in \mathbb{R}^4,$$

l'existence de ces zéros montre que la matrice $\bar{X}^{-1}$ ne répond pas aux conditions imposées.

E - REMARQUES SUR UN CAS PARTICULIER IMPORTANT DE L'ALGORITHME QR

Nous avons signalé que dans tous les algorithmes que nous avons étudiés, nous considérions des décompositions du type GR où R variant dans $T^+(n,\mathbb{R})$ et nous avons remarqué qu'il était capital de décrire $T^+(n,\mathbb{R})$ en entier.

On peut proposer certaines familles d'algorithmes qui n'utilisent pas $T^+(n,\mathbb{R})$, mais qui sont basées sur les décompositions suivantes :

.) La décomposition $A = \underline{L}\, Q$ d'une matrice ($\underline{L} \in T^-(n,\mathbb{R})$

.) La décomposition $A = \underline{L}\, R$ d'une matrice ($\underline{L} \in T^-(n,\mathbb{R})$ et $R \in T_1^+(n,\mathbb{R})$).

Nous ne développerons pas la première décomposition qui conduit à un algorithme de recherche de valeurs propres et qui utilise une démonstration voisine de celle que nous allons donner pour le second.

a) Décomposition $G\ell(n,\mathbb{R}) = \overline{T^-(n,\mathbb{R})\ T_1^+(n,\mathbb{R})}$

Soit $A \in G\ell(n,\mathbb{R})$ et considérons A^t.
Supposons que $A^t = LR$ (décomposition de Gauss valable presque partout)
($L \in T_1^-(n,\mathbb{R})$; $R \in T^+(n,\mathbb{R})$)

Alors $A = R^t\, L^t$ ($R^t \in T^-(n,\mathbb{R})$; $L^t \in T_1^+(n,\mathbb{R})$)

Nous obtenons ainsi une décomposition dans laquelle le second membre appartient à un sous groupe de $T^+(n,\mathbb{R})$.

Afin de distinguer de la notation habituelle, nous noterons :

$\underline{L}$ les éléments de $T^-(n,\mathbb{R})$
U les éléments de $T_1^+(n,\mathbb{R})$

b) Description de l'algorithme

Soit $A \in G\ell(n,\mathbb{R})$; nous allons supposer que l'algorithme est toujours constructible.

1) On forme $A_1 = \underline{L}_1\, U_1$

$A_2 = U_1\, \underline{L}_1 = \underline{L}_2\, U_2$

$\vdots$

$A_n = U_{n-1}\, \underline{L}_{n-1} = \underline{L}_n\, U_n$

$A_{n+1} = U_n\, \underline{L}_n = \underline{L}_{n+1}\, U_{n+1}$

Nous pouvons alors établir les formules suivantes :

$$\textcircled{1} \quad A_{n+1} = \underline{L}_n^{-1} A_n \underline{L}_n$$

$$\vdots$$

$$= \underline{L}_n^{-1} \ldots \underline{L}_1^{-1} A \underline{L}_1 \ldots \underline{L}_n$$

On pose alors $\underline{L}_n = \underline{L}_1 \ldots \underline{L}_n$ et ① s'écrit alors

$$A_{n+1} = \underline{L}_n^{-1} A \underline{L}_n \qquad \text{(I)}$$

$$\textcircled{2} \quad A_{n+1} = U_n A_n U_n^{-1}$$

$$\vdots$$

$$= U_n \ldots U_1 A U_1^{-1} \ldots U_n^{-1}$$

On pose $\rho_n = U_n \ldots U_1$ et l'on obtient

$$A_{n+1} = \rho_n A \rho_n^{-1} \qquad \text{(II)}$$

③ On vérifie alors de manière classique que

$$A^n = \underline{L}_n \rho_n \qquad \text{(III)}$$

Ceci étant posé, faisons l'hypothèse suivante :

On supposera $A = X D \bar{X}^1$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{avec } |\lambda_n| > \ldots > |\lambda_1| > 0$$

On supposera $X = \underline{L}\, U$

$$\bar{X}^1 = \tilde{\underline{L}}\, \tilde{U}$$

On a immédiatement :

$$A^n = \underline{L}\, U\, D^n\, \tilde{\underline{L}}\, \tilde{U}$$
$$= \underline{L}\, D^n\, D^{-n}\, U\, D^n\, \tilde{\underline{L}}\, \tilde{U}$$

Si l'on considère alors la matrice

$\tilde{R} = D^{-n}\, U\, D^n$ c'est une matrice définie par

$$\tilde{R} = \begin{cases} 0 \text{ si } i > j \\ 1 \text{ si } i = j \\ \left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^n \quad i < j \end{cases}$$

Or, si $i < j$ on a $\left|\dfrac{\lambda_i}{\lambda_j}\right| < 1$ donc $\left|\dfrac{\lambda_i}{\lambda_j}\right|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

On en déduit que

$\tilde{R} = I + E_n$ avec E_n triangulaire supérieure tendant vers zéro si $n \to \infty$.

Donc $A_n = \underline{L}\, D^n\, (I+E_n)\, \tilde{\underline{L}}\, \tilde{U}$

$$= \underline{L}\, D^n\, \tilde{\underline{L}}\, (I+\tilde{\underline{L}}^{-1}\, E_n\, \tilde{\underline{L}})\, \tilde{U}$$

Par continuité de la décomposition, on peut écrire

$$I + \tilde{\underline{L}}^{-1}\, E_n\, \tilde{\underline{L}} = \underline{\ell_n}\, u_n$$

avec $\underline{\ell_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} I$

$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} I$

donc $A^n = \underline{L}\, D^n\, \tilde{\underline{L}}\, \underline{\ell_n}\, u_n\, \tilde{U}$ (IV) avec $u_n\, \tilde{U} \in T_1^+(n,\mathbb{R})$.

De (IV) et (III), on déduit :

$$\rho_n = u_n\, \tilde{U}$$
$$\underline{L_n} = \underline{L}\, D^n\, \tilde{\underline{L}}\, \ell_n$$

Donc quand n tend vers l'infini

$$\rho_n \to U$$

On a alors $A_{n+1} = \rho_n A \rho_n^{-1}$ donc

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n A \rho_n^{-1} = \tilde{U} A \tilde{U}^{-1}$$

Or, comme $A = X D \bar{X}^1 = \tilde{U}^{-1} \tilde{\underline{L}}^{-1} D \tilde{\underline{L}} \tilde{U}$ on en déduit

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \tilde{\underline{L}}^{-1} D \tilde{\underline{L}}$$

c) Conclusion

THEOREME

Soit $A \in G\ell(n,\mathbb{R})$

.) Si $A = X D \bar{X}^1$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

où $|\lambda_n| > \ldots > |\lambda_1| > 0$

.) Si X et $\bar{X}^1$ se décomposent en $\underline{L}$ U et $\tilde{\underline{L}}$ $\tilde{U}$
($\underline{L}$ et $\tilde{\underline{L}} \in T^-(n,\mathbb{R})$; U et $\tilde{U} \in T_1^+(n,\mathbb{R})$).

.) Si l'algorithme est constructible

La suite des matrices A_i générées par l'algorithme converge vers une matrice triangulaire inférieure ayant sur la diagonale $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Nous ne nous étendrons pas plus sur ces algorithmes qui sont pour l'instant intéressant du point de vue théorique.

QUATRIEME PARTIE

QUELQUES PROBLEMES RELATIFS A L'ALGORITHME LR

A - INTRODUCTION

Cette quatrième partie est consacrée à une étude plus fine des algorithmes de recherche de valeurs propres, nous limitant d'ailleurs à l'algorithme de base qu'est l'algorithme LR de Rutishauser.

Les problèmes que nous nous sommes posés sont les suivants :

Premier problème :

Nous savons qu'une hypothèse de base dans le théorème de Rutishauser est que l'algorithme soit constructible.
Nous nous sommes intéressé au problème qui consiste à déterminer des classes de matrices pour lesquelles LR est toujours (du moins théoriquement) constructible, les résultats que nous ennonçons sont encore très partiels malgré une méthode "constructive".

Deuxième problème :

Le deuxième problème est encore plus difficile et est lié directement au comportement numérique de l'algorithme.
Nous savons qu'une hypothèse du théorème de Rutishauser est que les valeurs propres soient ordonnées sur la diagonale en module décroissant. C'est une hypothèse capitale, mais évidemment pratiquement inaccessible.
Rutishauser lui-même avait remarqué que le comportement des éléments de la matrice subissaient des oscillations (sauts de valeurs sur la diagonale) jusqu'à être complètement ordonnés. /propres
Nous avons essayé d'expliciter ce phénomène, mais hélas pour des matrices dépassant deux dimensions, les équations (non linéaires) régissait les trajectoires des éléments diagonaux sont inextricables, néanmoins dans le cas 2×2 nous avons pu faire l'étude totale du phénomène et trouver certains résultats donnant une explication satisfaisante du comportement observé.

CONCLUSION

Il apparaitra à la lecture de nos résultats combien difficiles sont les problèmes posés. Ce sont d'ailleurs des problèmes totalement ouverts et il est certain que l'on ne pourra progresser dans l'étude des algorithmes de recherche des valeurs propres qu'après avoir dépouillé le théorème de Rutishauser de ses hypothèses réalistes mais inacessibles.

B - ETUDE DE LA CONSTRUCTIBILITE

§1) NOTATIONS ET RAPPELS

A) NOTATIONS (Gantmacher [1], Marcus Minc [2])

.) Si $1 \leq k \leq n$ nous noterons $Q_{k,n}$ l'ensemble de toutes les suites strictement croissantes de k entiers de $\{1,2,\ldots,n\}$.

.) Si $A \in M(n,\mathbb{R})$ nous noterons

$$A^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_p} = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_p} \\ a_{i_p j_1} & & a_{i_p j_p} \end{pmatrix}$$

$$M^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_p}(A) = \det A^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_p}$$

.) Si A et B sont deux matrices de $M(n,\mathbb{R})$ nous avons la formule de Binet Cauchy :

$$M^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\beta_1\ldots\beta_k}(AB) = \sum_{(j_1,\ldots,j_k)\in Q_{k,n}} M^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{j_1\ldots j_k}(A) M^{j_1\ldots j_k}_{\beta_1\ldots\beta_k}(B)$$

.) Expression des mineurs de la matrice inverse A^{-1} en fonction de ceux de A. On a :

$$M^{i_1 \dots i_p}_{k_1 \dots k_p}(A^{-1}) = \frac{(-1)^{\sum_{\nu=1}^{p} i_\nu + \sum_{\nu=1}^{p} k_\nu} M^{k'_1 \dots k'_{n-p}}_{\ell'_1 \dots \ell'_{n-p}}}{\det A}$$

Dans cette expression

$$i_1 < i_2 < \dots < i_p$$

$$k_1 < k_2 < \dots < k_p$$

$$k'_1 < k'_2 < \dots < k'_p$$

$$\ell'_1 < \ell'_2 < \dots < \ell'_p$$

et $(i_1,\dots,i_p)$ $(\ell'_1,\dots\ell'_{n-p})$ forment un système complet d'indices $1,2,\dots,n$.

B) RAPPELS (Robert [3], Fiedler-Ptak [4])

Nous aurons besoin que certaines classes de matrices qui sont

1 la classe des M-matrices introduites par Fiedler-Ptak ([4] p 387)

2 la classe des H-matrices introduites par Ostrowski ([5]) et étudiées par Robert ([3]).

Nous noterons

$$Z_n^o = \{A \in M(n,\mathbb{R}) \ ; \ a_{ij} \leq 0 \quad \forall i \neq j\}$$

$$Z_n = \{A \in Z_n^o \ ; \quad a_{ii} > 0 \quad \forall i=1,\dots,n\} \ .$$

La classe des M-matrices se définissant alors grace au théorème suivant :

THEOREME

Soit $N \in Z_o$ les propositions suivantes sont équivalentes :

1°) $\exists\ u \geq 0$ tel que $Nu > 0$

2°) $\exists\ u > 0$ tel que $Nu > 0$

3°) Il existe une diagonale positive Δ telle que $N\Delta e > 0$
(e : vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1)

4°) Il existe une diagonale positive Δ telle que $W = N\Delta$ est une matrice à diagonale positive dominante.

5°) Pour toute matrice diagonale R telle que $R \geq N$ l'inverse R^{-1} existe et $\rho(R^{-1}(D-N)) < 1$ où D est la diagonale de N.

6°) Si $B \in Z_o$ et $B \geq N$ alors B^{-1} existe.

7°) Toute valeur propre réelle de N est positive.

8°) Tous les mineurs principaux de N sont positifs.

9°) Il existe une suite strictement croissante de sous-ensembles de $K = \{1,2,\ldots,k\}$, soit

$$\emptyset \neq M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_k = K$$

telle que les mineurs principaux $\det(N(M_i)) > 0$.

10°) $\exists$ une matrice de permutation P telle que $P\,N\,P^t$ puisse s'écrire sous la forme RS ($R \in T^-(n,\mathbb{R}) \cap Z$ et $S \in T^+(n,\mathbb{R}) \cap$

11°) L'inverse N^{-1} existe et $N^{-1} \geq 0$.

12°) La partie réelle de toute valeur propre de N est positive.

13°) Pour tout vecteur $x \geq 0$, il existe un indice i tel que $x_i y_i >$ pour $y = Nx$.

On a alors la définition :

DEFINITION

Une M-matrice est un élément de Z_o^n vérifiant l'une des conditions équivalentes du théorème précédent.

Nous noterons M_n la classe des M-matrices.

Si $A = (a_{ij})$ nous noterons :

$$H(A) = \begin{pmatrix} |a_{11}| & -|a_{12}| & \cdots & -|a_{1n}| \\ -|a_{21}| & |a_{22}| & -|a_{23}| & -|a_{2n}| \\ & & & \\ -|a_{n1}| & \cdots & -|a_{n,n-1}| & |a_{nn}| \end{pmatrix}$$

DEFINITION

Une matrice $A \in M(n,\mathbb{R})$ est dite H-matrice si et seulement si $H(A)$ est une M-matrice.

Nous noterons

$$H_n = \{A \in M(n,\mathbb{R}) \ ; \ H(A) \in M_n\} \ .$$

Le théorème suivant sera utilisé :

THEOREME

$$M_n \subset H_n \subset Gl(n,\mathbb{R})$$

Pour une démonstration nous renvoyons à Ostrowski [5].

§2) QUELQUES LEMMES TECHNIQUES

LEMME

Soit A une matrice diagonalisable, $A = XDX^{-1}$, alors le déterminant du pième mineur principal de A est

$$C_p(d_1,\ldots,d_n) = \frac{1}{\det X} \cdot \det \begin{pmatrix} d_1x_{11} & d_2x_{12} & \cdots & d_nx_{1n} \\ d_1x_{21} & & & d_nx_{2n} \\ & & & \\ d_1x_{p1} & & & d_nx_{pn} \\ x_{p+1,1} & & & x_{p+1,n} \\ x_{n1} & & & x_{n,n} \end{pmatrix}$$

avec $X = (x_{ij})$ et $D = (d_i)$.

Suivant la règle de Binet-Cauchy

$$M^{1\cdots p}_{1\cdots p}(A) = M^{1\cdots p}_{1\cdots p}(XDX^{-1}) = \sum_{(j_1,\ldots,j_p)\in Q_{p,n}} M^{1\cdots p}_{j_1\cdots j_p}(XD) M^{j_1\cdots j_p}_{1\cdots p}(X^{-1})$$

De même

$$M^{1\cdots p}_{j_1\cdots j_p}(XD) = \sum_{(k_1,\ldots,k_p)\in Q_{p,n}} M^{1\cdots p}_{k_1\cdots k_p}(X) M^{k_1\cdots k_p}_{j_1\cdots j_p}(D)$$

compte tenu du fait que D est diagonale on en déduit :

$$M^{1\cdots p}_{j_1\cdots j_p}(XD) = d_{j_1}\cdots d_{j_p}\, M^{1\cdots p}_{j_1\cdots j_p}(X)$$

d'où

$$M^{1\cdots p}_{1\cdots p}(XDX^{-1}) = \sum_{(j_1\cdots j_p)\in Q_{p,n}} d_{j_1} d_{j_2}\cdots d_{j_p}\, M^{1\cdots p}_{j_1\cdots j_p}(X) M^{j_1\cdots j_p}_{1\cdots p}(X^{-1})$$

Mais comme (Gantmacher [2])

$$M^{j_1\cdots j_p}_{1\cdots p}(X^{-1}) = \frac{(-1)^{\sum_{\nu=1}^{p} j_\nu + \sum_{\nu=1}^{p} \nu}\, M^{p+1,\ldots,n}_{1,\ldots\check{j}_1,\ldots\check{j}_p,\ldots,n}(X)}{\det X}$$

($\check{j}_i$ marque l'absence de j_i dans la suite écrite).
On obtient

$$M^{1\cdots p}_{1\cdots p}(A) =$$

$$= \sum_{(j_1,\ldots,j_p)\in Q_{p,n}} d_{j_1} d_{j_2}\cdots d_{j_p} \frac{(-1)^{\sum_{\nu=1}^{p} j_\nu + \sum_{\nu=1}^{p} \nu}}{\det X} \cdot M^{1\cdots p}_{j_1\cdots j_p}(X) M^{p+1,\ldots,n}_{1\cdots\check{j}_1,\ldots\check{j}_p,\ldots,n}(X)$$

ce qui n'est autre que l'expression annoncée.

c.q.f.d.

DEFINITION

Etant donnée une matrice X nous appellerons C_p-cônes associés à cette matrice (p=1,2,...,n-1) les surfaces algébriques d'équation

$$0 = C_p(T_1,T_2,\ldots,T_n) = \det\begin{pmatrix} T_1x_{11} & T_2x_{12} & & T_nx_{1n} \\ T_1x_{p1} & T_2x_{p2} & & T_nx_{pn} \\ x_{p+1,1} & & & x_{p+1,n} \\ x_{n,1} & & & x_{n,n} \end{pmatrix}$$

LEMME 2

Si X est une H-matrice, alors $X^{i_1\ldots i_p}_{i_1\ldots i_p}$ est une H-matrice.

Soit Δ la diagonale positive telle que $H(X)\,\Delta$ soit à diagonale positive dominante

$H(X^{i_1\ldots i_p}_{i_1\ldots i_p})$ qui est une Z_n matrice est telle que

$H(X^{i_1\ldots i_p}_{i_1\ldots i_p})\Delta^{i_1\ldots i_p}_{i_1\ldots i_p}$ est à diagonale positive dominante donc on a le résultat.

LEMME 3

$A \in Gl(n,\mathbb{R})$ se décompose (de manière unique) en un produit d'une matrice triangulaire inférieure unipotente et d'une matrice triangulaire supérieure régulière si et seulement si ses mineurs principaux ne sont pas nuls.

Il ne s'agit là que du rappel classique sur la décomposition de Gauss.

§3) LE LEMME PRINCIPAL

LEMME

Si X est une M-matrice alors

$C_p(T_1,\ldots,T_n) \cap \gamma = \emptyset$

où

$\gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n > 0\}$.

Soit X une M-matrice que nous noterons

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & -x_{12} & & -x_{1n} \\ -x_{21} & x_{22} & & -x_{2n} \\ & & & \\ -x_{n1} & -x_{n2} & & x_{nn} \end{pmatrix}$$

avec $x_{ij} \geq 0$.

Nous noterons Δ la matrice diagonale positive telle que $X\Delta$ soit a diagonale positive dominante, et $\Lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ un vecteur de γ .

Si nous considérons la matrice

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_{11} & -\lambda_2 x_{12} & & -\lambda_n x_{1n} \\ & & & \\ -\lambda_1 x_{p1} & -\lambda_2 x_{p2} & & -\lambda_n x_{pn} \\ -x_{p+1,1} & -x_{p+1,2} & & -x_{p+1,n} \\ -x_{n,1} & & & x_{nn} \end{pmatrix}$$

On voit que c'est une Z-matrice, démontrons que c'est aussi une H-matrice.

Pour cela considérons la matrice diagonale

$$\tilde{\Delta} = \begin{pmatrix} \frac{\delta_1 \lambda_p}{\lambda_1} & & & & & \\ & \frac{\delta_2 \lambda_p}{\lambda_2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \frac{\delta_{p-1} \lambda_p}{\lambda_{p-1}} & & \\ & & & & \delta_p & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \delta_n \end{pmatrix}$$

Nous obtenons pour $X\tilde{\Delta}$

$$\tilde{\Delta} = \begin{pmatrix} \delta_1\lambda_p x_{11} & -\delta_2\lambda_p x_{12} & \cdots & -\delta_{p-1}\lambda_p x_{1p-1} & -\delta_p\lambda_p x_{1p} & -\delta_{p+1}\lambda_{p+1} x_{1p+1} & \cdots & -\delta_n\lambda_n x_{1n} \\ -\delta_1\lambda_p x_{21} & \delta_2\lambda_p x_{22} & & & & & & -\delta_n\lambda_n x_{2n} \\ & & \ddots & & & & & \\ -\delta_1\lambda_p x_{p1} & -\delta_2\lambda_p x_{p2} & & & \delta_p\lambda_p x_{pp} & & & -\delta_n\lambda_n x_{pn} \\ \frac{-\delta_1\lambda_p x_{p+1,1}}{\lambda_1} & & & -\delta_{p-1}\frac{\lambda_p}{\lambda_{p-1}} x_{p+1,p-1} & \delta_p x_{p+1,p} & & & -\delta_n x_{p+1,n} \\ & & & & & \ddots & & \\ -\delta_1\frac{\lambda_p}{\lambda_1} x_{n,1} & & & & & & & +\delta_n x_{n,n} \end{pmatrix}$$

.) Si $1 \leq i \leq p$ alors la ième ligne est telle que

$$\delta_i\lambda_p x_{ii} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} \delta_j\lambda_p x_{ij} + \sum_{j=p}^{n} \delta_j\lambda_j x_{ij}$$

En effet $X\tilde{\Delta}$ étant a diagonale dominante nous avons

(1) $\quad \delta_i x_{ii} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \delta_j x_{ij}$ d'où le résultat.

.) Si $p+1 \leq i \leq n$ on a

$$\delta_i x_{ii} \geq \sum_{j=1}^{p-1} \delta_j \frac{\lambda_p}{\lambda_j} x_{ij} + \sum_{\substack{j=p \\ j\neq i}}^{n} \delta_j x_{ij}$$

compte tenu de (1) et du fait que pour $j=1,\ldots,p-1$ on a $\lambda_j > \lambda_p$ on a pour le résultat

$\tilde{X}\Delta$ est a diagonale dominante, X est bien une H-matrice et d'après le théorème 1, $\det \tilde{X} \neq 0$ donc $C_p(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \neq 0$.

Par suite $C_p(T_1,\ldots,T_n) = 0$ ne rencontre pas γ .

c.q.f.d.

§4) SUR UNE CLASSE DE MATRICES POUR LAQUELLE L'ALGORITHME DE RUTISHAUSER EST CONSTRUCTIBLE

Rappelons tout d'abord le théorème classique (Rutishauser [ ]) de convergence de l'algorithme LR :

THEOREME DE RUTISHAUSER

Si A est une matrice vérifiant les propriétés suivantes

R1 $A = XDX^{-1}$ (D diagonale)

R2 $|\lambda_1| > |\lambda_2| \ldots > |\lambda_n| > 0$

R3 Si X et X^{-1} ont leurs mineurs principaux réguliers

R4 Si l'algorithme LR est constructible pour A.

alors les transformées de A par l'algorithme convergent vers une matrice triangulaire supérieure ayant sur la diagonale les valeurs propres de A.

Il est immédiat que la condition R4 est équivalente à :

R'4 pour tout $n \geq 1$, les mineurs principaux de A^n sont réguliers.

Annonçons alors le théorème :

THEOREME

Soit $A \in M(n,\mathbb{R})$ vérifie

(1) $A = XDX^{-1}$

(2) X est une H-matrice

(3) $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n| > 0$

alors

(C1) l'algorithme LR est constructible pour A.

(C2) Il converge vers une matrice triangulaire supérieure ayant les valeurs propres de A sur la diagonale.

Démonstrons C1

D'après la remarque de la première partie A), il suffit que les mineurs principaux de A^n ($n \geq 1$) soient réguliers.

Mais :

$$M_{1\ldots p}^{1\ldots p}(A^n) = \frac{1}{\det X} \det \begin{vmatrix} \lambda_1^n x_{11} & & \lambda_n^n x_{1n} \\ \lambda_1^n x_{p1} & & \lambda_n^n x_{pn} \\ x_{p+1,1} & & x_{p+1,n} \\ x_{n,1} & & x_{n,n} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

A la matrice Y du second membre associons

$$H(Y) = \begin{vmatrix} |\lambda_1|^n|x_{11}| & -|\lambda_2|^n|x_{12}| & \ldots & -|\lambda_n|^n|x_{1n}| \\ -|\lambda_1|^n|x_{21}| & |\lambda_2|^n|x_{22}| & & \\ & & & \\ -|\lambda_1|^n|x_{p1}| & & & \\ -|x_{p+1,1}| & & & \\ -|x_{n,1}| & & & |x_{nn}| \end{vmatrix}$$

Puisque X est une H-matrice, on déduit du lemme 3 et du fait que $|\lambda_1|^n > |\lambda_2|^n > \ldots > |\lambda_n|^n > 0$, que H(Y) est une matrice donc Y est une H-matrice donc det Y $\neq$ 0 et par suite $M_{1\ldots p}^{1\ldots p}(A^n) \neq 0$.

c.q.f.d.

Démontrons C2

D'après le théorème de Rutishauser, il suffit de vérifier que X et X^{-1} sont décomposablessous la forme LR pour assurer la convergence de l'algorithme ; or cela résulte du lemme suivant.

LEMME

Si X est une H-matrice alors X et X^{-1} sont décomposables sous la forme LR.

a) X se décompose

En effet d'après le lemme 1, IIème partie, les déterminants des mineurs principaux sont non nuls d'où le résultat d'après B) 1ère partie.

b) X^{-1} se décompose

En effet $M_{1\ldots p}^{1\ldots p}(X^{-1}) = \dfrac{M_{p+1\ldots n}^{p+1\ldots n}(X)}{\det X}$, il suffit encore d'appliquer le lemme 1, IIème partie.

c.q.f.d.

§5) CONCLUSION

On peut énoncer de nombreux résultats de constructibilité en utilisant des sous classes de H_n, cela présente peu d'intérêt sauf pour une classe remarquable qui est celle des matrices à diagonale dominante ; il est bien connu (voir Robert [3]) que la classe des matrices à diagonale dominante est une sous classe de la classe des H-matrices, on a donc le résultat de constructibilité pour cette classe.

Ce résultat est intéressant car il montre qu'il est très important d'étudier les classes de matrices spécifiques pour appliquer un algorithme. Une matrice de passage X à diagonale dominante est bien telle que la géométrie de cette base soit adaptée à l'algorithme LR.

(Ces résultats avaient été annoncés dans [6], [7]).

C) ETUDE ANALYTIQUE DE L'ALGORITHME LR DANS $M(2,\mathbb{R})$ [1]

1) INTRODUCTION

Ayant constaté dans le paragraphe précédent la très grande difficulté que représentait l'étude analytique de l'algorithme LR dans le cas général, nous nous proposons de montrer que l'étude du cas des matrices de taille 2 permet d'obtenir des renseignements intéressants qui permettent d'expliquer certains phénomènes.

Soit donc

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$ une matrice appartenant à l'algèbre $M(2,\mathbb{R})$.

Nous supposerons, afin d'assurer la décomposition de Gauss de cette matrice que ,

1°) $a \neq 0$

2°) le déterminant $\Delta = ad-bc \neq 0$

Sous ces hypothèses nous avons alors la décomposition

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{\Delta}{a} \end{pmatrix}$$

La première étape de l'algorithme est alors la formation de la matrice A_1 semblable à A :

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{\Delta}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \frac{bc}{a} & b \\ \frac{\Delta c}{a^2} & \frac{\Delta}{a} \end{pmatrix}$$

Nous poserons

$$x_o = a$$

$$y_o = c \quad \text{puis avec une notation évidente :}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_o + \dfrac{b y_o}{x_o} \\ y_1 = \dfrac{\Delta y_o}{x_o^2} \end{cases}$$

En remarquant alors que

1) dans l'algorithme LR l'élément b de la matrice ne change pas,
2) nous n'avons pas besoin d'étudier d et sa descendance puisque dans l'algorithme le déterminant se conserve.

Nous voyons que l'étude de l'algorithme appliqué à A est équivalente à celle d'une itération à deux paramètres

$$x_{p+1} = x_p + \frac{b\, y_k}{x_p} \qquad \text{(I)}$$

$$y_{p+1} = \frac{\Delta y_p}{x_p^2} \qquad \text{(II)}$$

(b et Δ constantes)

Nous allons donc étudier cette itération.

2) RECURRENCE FONDAMENTALE

On peut immédiatement supposer que $b \neq 0$ sinon nous n'avons plus rien à étudier !

En remarquant que les différentes transformations de l'algorithme sont des similitudes, nous pouvons utiliser le fait que la trace T de la matrice reste constante et de ce fait :

$$\Delta = x_p(T-x_p) - by_p$$

Cette équation nous permet d'obtenir

$$by_p = (x_p(T-x_p) - \Delta)$$

Or $by_p = x_p(x_{p+1}-x_p)$ (formule (I)) ; on en déduit donc

$$x_{p+1} = T - \frac{\Delta}{x_p} \qquad \text{(III)}$$

T = trace (A)

Δ = déterminant de A

On doit alors faire les remarques suivantes :

1) Pour trouver x_p il faut que $x_o,\ldots,x_{p-1}$ soient non nuls si il existe un indice j tel que $x_j = 0$ l'algorithme s'arrête.

2) Si la suite x_p converge (et c'est ce qui nous intéresse) alors il est évident que y_p tend vers zéro ce qui est trivial d'après la théorie générale de LR.
Donc en fait il nous suffit d'étudier la convergence de la suite (x_p)

3) Pour la suite de la discussion, remarquons que les valeurs propres de A sont les racines de $X^2-TX+\Delta = 0$ et le discriminant de cette équation sera noté

$$\delta = T^2 - 4\Delta \ .$$

3) ETUDE DES DIFFERENTS CAS DE LA RECURRENCE

a) Cas particulier T = trace (A) = 0

L'itération devient $x_{p+1} = -\frac{\Delta}{x_p}$ donc on a

$$\begin{cases} x_o = a \\ y_o = c \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{\Delta}{a} \\ y_1 = \frac{\Delta c}{a^2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = a \\ y_2 = c \end{cases} .$$

L'algorithme cycle, donc comme $a \neq o$ alors l'algorithme LR est toujours possible mais il ne converge pas.

b) Cas où $\delta > 0$

Il est alors immédiat que la courbe $y = T - \frac{\Delta}{x}$ rencontre la première bissectrice en deux points distincts ayant pour abscisses les deux valeurs propres distinctes λ_m et λ_M $(|\lambda_M| > |\lambda_m|)$.

Sans rien changer à la généralité du raisonnement nous supposerons que la trace est positive (strictement).

Nous voyons d'autre part que la dérivée de la fonction
$f : x \to T - \frac{\Delta}{x}$ est $f'(x) = \frac{\Delta}{x^2}$ et par suite

$$f'(\lambda_m) = \frac{\lambda_m \lambda_M}{\lambda_m^2} = \frac{\lambda_M}{\lambda_m}$$

$$f'(\lambda_M) = \frac{\lambda_m \lambda_M}{\lambda_M^2} = \frac{\lambda_m}{\lambda_M}$$

donc

.) $|f'(\lambda_m)| > 1$

.) $|f'(\lambda_M)| < 1$

La racine de plus petit module est répulsive donc nous ne l'atteindrons jamais par l'itération et la racine de plus grand module est attractive.

Nous retrouvons par là le résultat classique sur l'algorithme LR qui assure que quand l'algorithme LR converge, il converge vers une matrice triangulaire ayant les valeurs propres ordonnées sur la diagonale par ordre de module décroissant.

Afin de faire une étude plus précise dans le cas $\delta > 0$, nous allons considérer plusieurs cas

1°) Si x_o n'appartient pas à $[\ \frac{\Delta}{T}\ ,\ \frac{T}{2}\ ]$.

Dans la zone extérieure à $[\ \frac{\Delta}{T}\ ,\ \frac{T}{2}\ ]$ l'algorithme LR est toujours possible la suite des x_p converge vers λ_M et la suite des y_p converge vers zéro.

La suite des matrices générées par l'algorithme converge donc vers

$$\begin{pmatrix} \lambda_M & b \\ 0 & \lambda_m \end{pmatrix}$$

La démonstration de ceci est évidente:

.) Si $x_o < \frac{\Delta}{T}$ on remarque que $x_2 > T$ et l'on retombe dans la zone $x_o > \frac{T}{2}$.

.) Si $x_o > \frac{T}{2}$ on remarque que la courbe $y = T - \frac{\Delta}{x}$ est telle que $|y'| = |\frac{\Delta}{x^2}| < \frac{4\Delta}{T^2} < 1$ et que λ_M appartient à cette zone il y a donc convergence de la suite des x_p vers λ_M .

2°) Si x_o appartient à $[\ \frac{\Delta}{T}\ ,\ \frac{T}{2}\ ]$

A ce stade de la discussion nous divisons l'étude en deux cas :

Premier cas : $\Delta > 0$ (figure 1)

1) Si $x_o \in]\lambda_m, \frac{T}{2}]$

Il est évident que les itères successifs sont strictement croissants et la suite converge vers λ_M .

2) Si $x_o \in [\frac{\Delta}{T}, \lambda_m]$

Nous appellerons cette zone : zone critique.

Dans cette zône nous avons le point $\frac{\Delta}{T}$; si $x_p = \frac{\Delta}{T}$ alors $x_{p+1} = T - \frac{\Delta}{\frac{\Delta}{T}} = 0$

et l'algorithme n'est plus constructible.
Par suite tous les "ancètres" du point x_p sont à éviter pour point de départ de l'algorithme, or ces "ancètres" sont obtenus en "remontant" l'itération c'est-à-dire en étudiant $x_{p-1} = \frac{\Delta}{T - x_p}$.

On peut remarquer que cette suite de points converge vers λ_m .

Donc dans la zone critique, il existe une suite de points tels que si l'on prend pour point de départ de l'algorithme un de ces points, alors l'algorithme s'arrêtera au bout d'un nombre fini de pas.
Si l'on prend dans cette zone, un point de départ x_o autre qu'un point de la suite, alors l'algorithme sera possible et la suite x_p convergera vers λ_M .

Deuxième cas : $\Delta < 0$ (figure 2)

C21) si $x_o \in]\frac{\Delta}{T - \frac{\Delta}{T}}, 0]$

On peut montrer que $x_1 < \frac{\Delta}{T}$ et nous retombons dans une zone de convergence.

C22) si $x_o \in [\frac{\Delta}{T}, \frac{\Delta}{T - \frac{\Delta}{T}}]$ nous sommes dans une zone critique.

Une discussion analogue à celle faite en C12) doit être faite et conduit aux mêmes résultats.

C) CAS $\delta = 0$

Dans ce cas particulier les deux racines λ_m et λ_M sont confondues et la discussion est la même que dans le cas b) la zone critique étant alors $[\frac{\lambda_m}{2}, \lambda_m]$.

D) CAS $\delta < 0$

Nous sommes obligatoirement dans le cas $\Delta > 0$ et de ce fait la courbe $y = T - \frac{\Delta}{x}$ ne rencontre pas la première bissectrice donc :

L'itération ne peut pas converger (même si elle est possible)

Même dans ce cas il est intéressant d'observer le comportement de l'algorithme et notamment ses cas d'arrêt (non constructibilité).

Nous avons déjà vu que l'algorithme s'arrête au premier pas si $x_{p-1} = \frac{\Delta}{T}$

Les "ancètres" du point $\frac{\Delta}{T}$ sont donnés par

$$Z_1 = \frac{\Delta}{T}$$

$$Z_2 = \frac{\Delta}{T - \frac{\Delta}{T}}$$

$$Z_3 = \frac{\Delta}{T - \frac{\Delta}{T - \frac{\Delta}{T}}} \qquad \text{etc...}$$

Nous voyons donc apparaître des approximants d'une fraction continue. Pour étudier cela (voir Wall [2]) nous utiliserons le résultat suivant :

Si u et v sont les racines de l'équation $X^2 - bX - a = 0$ (a et $b \neq 0$) le p_{+1}ème approximant de la fraction continue :

$$u+v - \cfrac{v}{1 + \cfrac{v}{u}\ \cfrac{v}{u+v - \cfrac{uv}{\ddots}}}$$

est donné par

$$u+v - \cfrac{v}{\cfrac{v}{u} + \cfrac{1}{\sum_{i=0}^{p} \left(\frac{v}{u}\right)^i}}$$

Donc nous pouvons assurer que

$$Z_p = \frac{\Delta}{T - \dfrac{v}{\dfrac{v}{u} + \sum_{i=0}^{p} \left(\dfrac{v}{u}\right)^i}}$$

où u et v sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique. Si nous posons alors

$\frac{v}{u} = e^{2i\theta}$ on voit que l'on peut écrire

$$Z_p = \frac{\rho}{2\cos\theta - \dfrac{\sin (p+1)\theta}{\sin (p+2)\theta}}$$

Ce qui montre que l'on peut se ramener à l'étude d'une expression de la forme :

$$Z_p = \frac{1}{a + b \operatorname{cotg} p\,\theta}$$

On voit alors que le comportement de cette suite se décompose en deux cas :

1°) Si θ est rationnel il se forme un cycle,ce qui montre que les points où l'algorithme cesse d'être constructible sont en nombre fini.

2°) Si θ est irrationnel l'ensemble des points d'arrêt de l'algorithme est alors dense sur $\mathbb{R}$.

(Δ déterminant de la matrice, T trace de la matrice δ discriminant de l'équation $X^2-TX+\Delta=0$
λ_M = racine de module maximum, λ_m racine de module minimum).

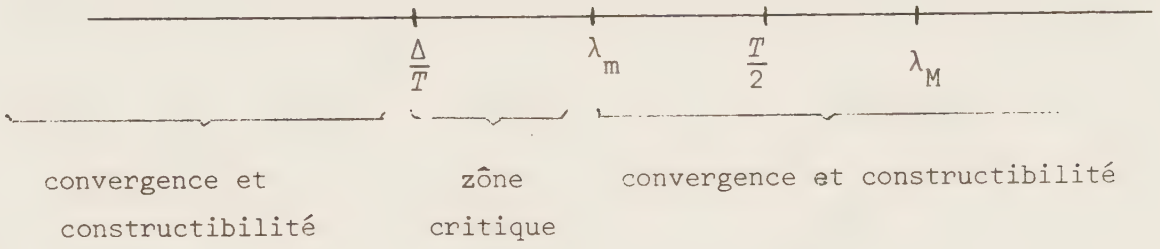
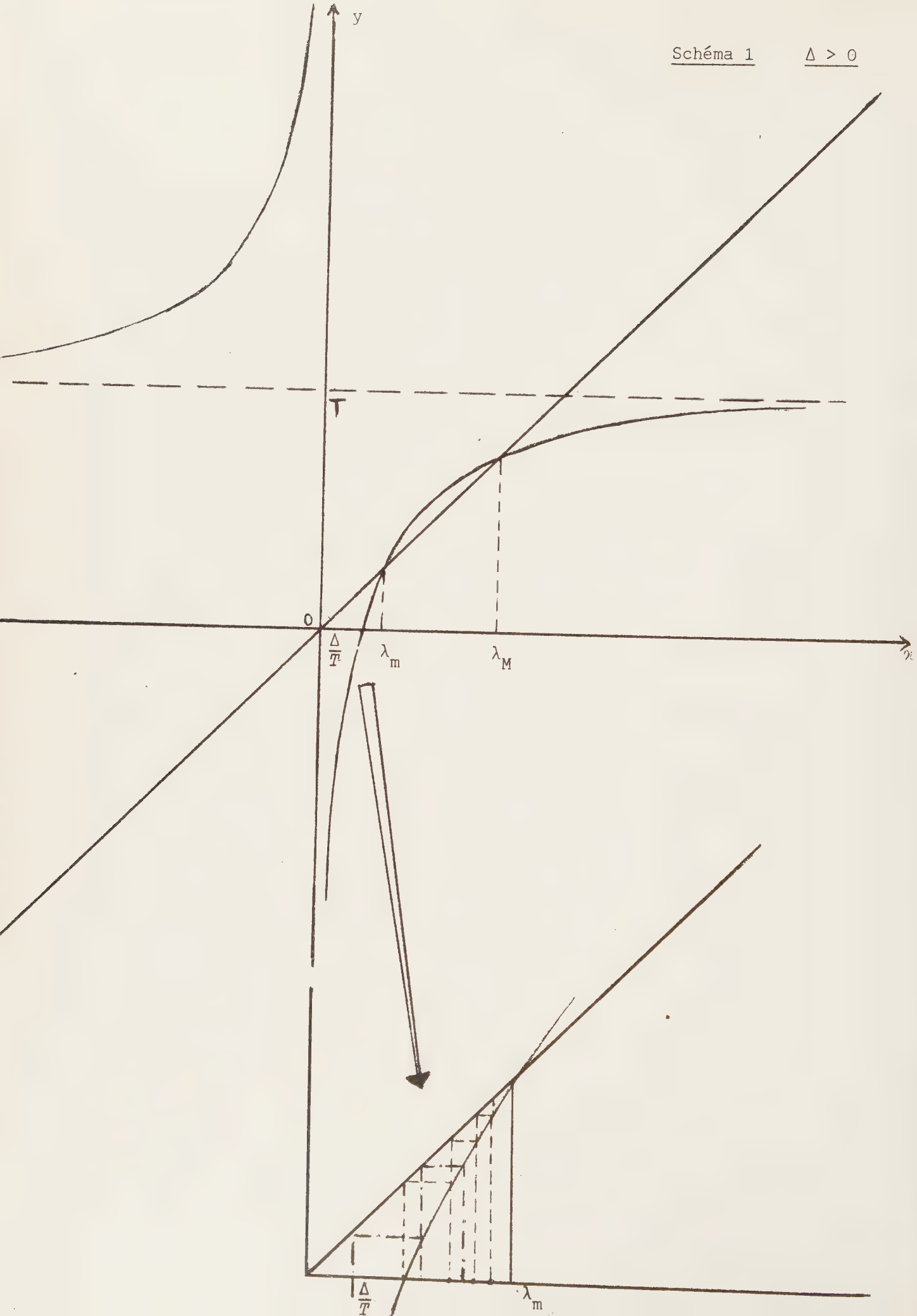
$T = 0$	L'algorithme est constructible mais ne converge pas
$\delta > 0$ $\lambda_m+\lambda_M > 0$	 L'algorithme LR est presque toujours constructible et convergent.
$\delta = 0$	L'algorithme LR est presque toujours constructible et convergent (cf. cas précédent)
$\delta < 0$	L'algorithme ne converge pas.

Schéma 1 $\Delta > 0$



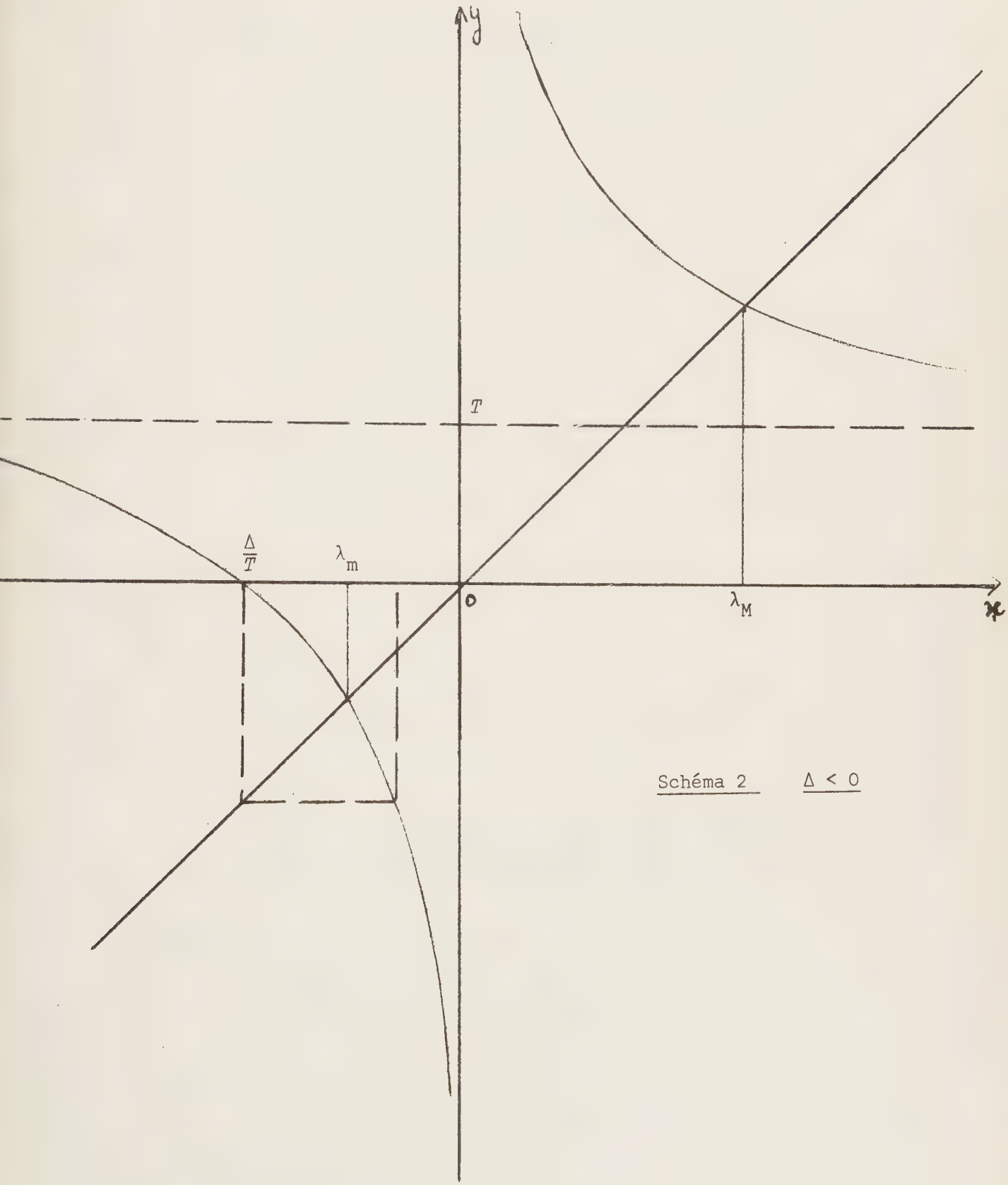


Schéma 2 $\Delta < 0$

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION

[1] GASTINEL N. Analyse numérique linéaire. Hermann.

[2] WILKINSON The algebrac eigenvalue problem. Oxford.

PARTIE I

[1] N. GASTINEL
Analyse numérique linéaire. Hermann

[2] J. DELLA DORA
Sur les algorithmes de recherche de valeurs propres de matrices;
C.R.A.S. 19 février 1973 Série A-637 t 276.

[3] J. DELLA DORA
Décomposition de matrices. Applications.
Séminaire d'analyse numérique. Grenoble (février 1973).

PARTIE II

CHAPITRE I

[1] E.B. DYNKIN
The maximal subgroups of the classical groups.
American Math. Soc. translation, Séries 2.

[2] GRAEV
Unitary representation of real simple Lie the group.
American Math. Soc. translation séries 2 vol 66.

CHAPITRE II

[1] E. CARTAN
The theory of spinors. Hermann

[2] J. DIEUDONNE
Sur les groupes classiques. Hermann

[3] N. GASTINEL
Analyse numérique linéaire. Hermann

[4] G.E. SHELOV
Linear algebra. Prentice Hall

[5] P. SCHERK
On the decomposition of orthogonalities into symmetries.

[6] C. CHEVALLEY
Classification des groupes de Lie algèbrique. Séminaire Paris.

CHAPITRE III

[1] E. ARTIN
Algèbre géométrique. Gauthier-Villars.

[2] H. WEYL
Classical groups. Princeton.

[3] J. DELLA DORA
Décomposition de matrices. Applications.
Séminaire d'analyse numérique. Grenoble (février 1973).

[4] WALLACE
Differential topology. Benjamin.

[5] N. GASTINEL
Analyse numérique linéaire. Hermann.

[6] R. VARGA
Matrix iterative analysis

CHAPITRE IV

[1] L. DICKSON
Theory of linear group in arbitrary field.
Trans. Amer. Math. Soc. vol 2 1901 p 363-394

[2] R. REE
On simple groups defined by C. Chevalley.
Trans. Amer. Math. Soc. 84 (1957) 392-400.

CHAPITRE IV

[1] J. DELLA DORA
Décomposition de matrices. Applications. (déjà cité).

CHAPITRE V

[1] A. BOREL
Introduction aux groupes arithmétiques. Hermann.

[2] WILKINSON
Convergence of the LR and QR algorithms.

[3] J. DELLA DORA
Décomposition généralisée de Bruhat d'une matrice.
Séminaire d'analyse numérique (Grenoble 1972).

PARTIE IV

CHAPITRE I

[1] GANTMACHER
Théorie des matrices (vol 1). Dunod.

[2] MARCUS-MINC
Matrix theory. Prindle. Weber et Schmidt.

[3] F. ROBERT
Etude et utilisation de normes vectorielles en analyse numérique linéaire. Thèse Fac. Sciences de Grenoble.

[4] FIEDLER-PTAK
On matrices with non positive off diagonal elements and positive principal minors.
Czec. Math. J. 12 (87) 382-400 (1962).

[5] OSTROWSKI
Über die determinauten mit uberwiegender hamtdiagonale.
Comment Math. Heber 10.1 69-96 (1937).

[6] J. DELLA DORA
Etude sur l'algorithme LR
Séminaire d'analyse numérique Grenoble (3 mai 1972).

[7] J. DELLA DORA
Remarques sur l'algorithme LR.
Colloque d'analyse numérique d'Epinal (1972).

§2)

[1] J. DELLA DORA
Etude sur l'algorithme LR (déjà cité).

[2] H.S. WALL
Analytic theory of continued fractions.